

1919.

GENERAL LIBRARY
AUG 23 1919
UNIV. OF MICHIGAN

No. 4.

400

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 58. Heft 4

DER GAMMEN REIHE 968. BANDES 4. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
DÖRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die "Annalen" werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 24 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 66 M.

Ausgegeben am 14. März 1919.

Inhalt.

	Seite
1. Edgar Meyer. Über die Beeinflussung des Funkenpotentials durch ein transversales Magnetfeld	297
2. K. W. Meissner. Zur Kenntnis des Neonspektrums	333
3. J. Sommer. Über die lineare Differentialgleichung für gekoppelte elektrische Schwingungen und die Wurzeln der Gleichung vierten Grades	375

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuziehen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahresszahl aufzuführen.

0

Inhalt.

	Seite
1. Edgar Meyer. Über die Beeinflussung des Funkenpotentials durch ein transversales Magnetfeld	297
2. K. W. Meissner. Zur Kenntnis des Neonspektrums	333
3. J. Sommer. Über die lineare Differentialgleichung für gekoppelte elektrische Schwingungen und die Wurzeln der Gleichung vierten Grades	375

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuziehen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahresszahl aufzuführen.





ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE BAND 58.

1. *Über die Beeinflussung des Funkenpotentials durch ein transversales Magnetfeld¹⁾;*
von Edgar Meyer.

Einleitung.

§ 1. Bekanntlich bezeichnet man als *Funkenpotential* diejenige maximale Potentialdifferenz, die man an die Elektroden einer Gasentladungsstrecke für eine unbeschränkte Zeit anlegen kann, ohne daß Funkenentladung eintritt.²⁾ Im folgenden wird der Einfluß behandelt, den ein magnetisches Feld auf dieses Funkenpotential ausübt³⁾; dabei soll unter transversalem magnetischen Felde ein solches verstanden sein, dessen Kraftlinien senkrecht zu denen des elektrischen Feldes verlaufen; longitudinal wird das magnetische Feld genannt, wenn seine Richtung parallel derjenigen des elektrischen Feldes ist.

§ 2. Eine Übersicht über die bisherigen Beobachtungen ergibt folgendes:

Thomson⁴⁾ hat wohl als erster den Einfluß eines magnetischen Feldes auf das Einsetzen einer selbständigen Elek-

1) Vgl. die vorläufige Mitteilung: Edgar Meyer, Arch. de Genève (4) 41. p. 491. 1916.

2) J. J. Thomson, Elektrizitätsdurchgang durch Gase; übers. von E. Marx, Leipzig 1906 bei Teubner. p. 368.

3) Bei einer derartigen Abgrenzung des Problems brauchen die vielen Arbeiten nicht berücksichtigt zu werden, die den Einfluß eines Magnetfeldes auf das Potential einer bestehenden selbständigen elektrischen Strömung in einem Gase behandeln. Die wichtigsten hierher gehörenden Arbeiten sind: A. Paalzow und F. Neesen, Wied. Ann. 63. p. 209. 1897. — K. Birkeland, C. R. 126. p. 586. 1898. — E. Riecke, Ann. d. Phys. 4. p. 592. 1901. — R. S. Willows, Phil. Mag. (6) 1. p. 250. 1901. — J. E. Almy, Proc. Cambr. Phil. Soc. 11. p. 183. 1900—1902. — O. Lehmann, Verh. d. naturwiss. Vereins zu Karlsruhe 18. p. 76. 1904 bis 1905. — R. F. Earhart, Phys. Rev. (2) 8. p. 103. 1914. — O. W. Silvey, Phys. Zeitschr. 14. p. 816. 1913.

4) J. J. Thomson, Recent Researches, § 89—91, Oxford, Clarendon Press 1893.

trizitätsströmung in Gasen bei der elektrodenlosen Ringentladung beobachtet. Er fand, daß die Entladung in einem longitudinalen Magnetfelde erleichtert, in einem transversalen Felde dagegen erschwert wurde.

Warburg¹⁾ fand anlässlich seiner bekannten Untersuchungen über die Verzögerung bei der Funkenentladung, daß das Funkenpotential in Luft von ca. 0,02—0,08 mm Hg-Druck durch transversale Magnetfelder stark erhöht, durch longitudinale dagegen beträchtlich erniedrigt wurde. Bei höheren Drucken wurde kein Einfluß des Magnetfeldes mehr konstatiert.

Precht²⁾ hat dann einen recht komplizierten Einfluß eines Magnetfeldes auf die Funkenentladung in Luft von Atmosphärendruck festgestellt, allerdings nur für den Fall, daß der Funken zwischen einer Spitze und einem abgerundeten Drahte überging.

Die Resultate Warburgs fanden ihre Bestätigung in den Arbeiten von Lehmann³⁾, Sieveking⁴⁾ und Meurer.⁵⁾

Eingehender beschäftigte sich dann Righi⁶⁾ mit dem Problem. Er bestimmte das Funkenpotential in Abhängigkeit von der Feldstärke sowohl in transversalen als auch in longitudinalen Feldern, jedoch nur bei wenigen einzelnen Drucken. Seine Resultate, die einen sehr verwickelten Zusammenhang zwischen Funkenpotential und magnetischer Feldstärke ergeben, weichen in vielen Punkten von meinen Ergebnissen ab, was sich aber ohne weiteres auf das nicht homogene elektrische Feld bei Righi zurückführen läßt.

Im Anschluß an diese Versuche von Righi und an solche von Gouy⁷⁾ hat darauf Bloch⁸⁾ einige Experimente angestellt; er gibt aber für den uns hier interessierenden Fall von *homogenem* elektrischen und transversalem magnetischen Felde keine quantitativen Angaben. Seine Deutung, die sehr wenig tief ist, zieht auch die Stoßionisationstheorie von Townsend nicht in Betracht.

1) E. Warburg, Sitzungsber. d. Berliner Akad. 10. p. 128. 1897; sowie Wied. Ann. 62. p. 385. 1897.

2) J. Precht, Wied. Ann. 66. p. 676. 1898.

3) O. Lehmann, Boltzmann-Festschrift p. 287. Leipzig bei Barth 1904.

4) H. Sieveking, Ann. d. Phys. 20. p. 209. 1906.

5) H. Meurer, Ann. d. Phys. 28. p. 199. 1909.

6) A. Righi, Rend. della R. Acc. di Bologna 14. p. 151. 1909—1910; Le Radium 7. p. 285. 1910; 8. p. 135 u. 196. 1911.

7) L. Gouy, C. R. 150. p. 1652. 1910; 151. p. 1020. 1910.

8) E. Bloch, Le Radium 8. p. 51. 1911.

Vermittelst einer Entladungsrohre, in welcher die Elektroden zwei koaxiale Zylinder waren, zeigte Strutt¹⁾, daß bei sehr niedrigem Drucke eine Potentialdifferenz selbst von ca. 200000 Volt keine Entladung hervorbrachte, ein transversales Magnetfeld jedoch eine leuchtende Entladung mit einer Potentialdifferenz von ca. 300—400 Volt zustande kommen ließ. Diese Arbeit ist deswegen von Wichtigkeit, weil, an sie anschließend, zuerst eine, wie mir scheint, plausible Erklärung des Einflusses eines Magnetfeldes auf die selbständige Elektrizitätsströmung gegeben wurde.

§ 3. Falls das Magnetfeld nicht besteht, erzeugen nämlich nach Townsend²⁾ die Elektronen in dem hohen Vakuum von Strutt deshalb so geringe Ionisation in dem Raume zwischen den Elektroden, weil sie zu selten mit Gasmolekülen zusammenstoßen. Wird aber das transversale Magnetfeld erregt, so sind die Bahnen der Elektronen Spiralen, und der wirkliche Weg, den jetzt die Elektronen in dem Gase zurücklegen, ist sehr viel größer als die direkte Entfernung der beiden Elektroden. Es wird also die Anzahl der Zusammenstöße zwischen einem Elektron und den Gasmolekülen stark ansteigen und, falls eine genügend hohe Potentialdifferenz anliegt, so daß die kinetische Energie des Elektrons vor jedem Zusammenstoße genügend groß ist, kann nunmehr eine starke Stoßionisation und damit selbständige Entladung einsetzen.

Nach Townsend ist so die Wirkung des Magnetfeldes dieselbe wie die einer *Drucksteigerung des Gases*, wenigstens soweit die Ionisation durch Elektronen in Betracht kommt. Eine hiermit identische Deutung des Effektes gab Horton.³⁾

§ 4. Trotz der vielen zitierten Beobachtungen fehlen jedoch systematische Versuche über die Abhängigkeit des Funkenpotentials vom Druck im Magnetfelde. Das Ziel der folgenden Messungen ist solche auszuführen, sowie festzustellen, ob wirklich die Townsendsche Deutung in allen Punkten zutrifft. Die Verwendung gut homogener elektrischer und magnetischer Felder, auf die in den angeführten Arbeiten nie Gewicht gelegt wurde, schien mir geeignet, die Versuchsbedingungen möglichst durchsichtig zu machen. Es wurden

1) R. J. Strutt, Proc. Roy. Soc. London (A) 89, p. 68. 1913—1914.

2) J. S. Townsend, Phil. Mag. (6) 26, p. 730. 1913.

3) F. Horton, Phil. Mag. (6) 26, p. 902. 1913.

transversale Felder untersucht, da hierbei die quantitativen Berechnungen nach Townsends Stoßionisationstheorie besonders einfach werden.

Das Resultat der Versuche zeigt aber, daß es trotz der klaren und vereinfachten Versuchsbedingungen nicht gelingt, alle Erscheinungen auf Grund der reinen Townsendschen Theorie so zu deuten, als ob der Magneteinfluß einfach äquivalent einer Drucksteigerung des Gases ist. Immerhin bieten die Versuche einiges Interesse, besonders auch deshalb, weil dabei recht sorgfältige Bestimmungen des Funkenpotentials in Luft von mittlerem Drucke ohne Magnetfeld ausgeführt wurden, die, wie mir scheint, richtigere Werte ergeben als die bisher bekannten.

§ 5. Ehe die neuen Versuche beschrieben werden, ist noch eine Arbeit von Earhart¹⁾ zu besprechen, in der ebenfalls ganz homogene elektrische und magnetische Felder verwendet werden, deren Richtungen aber einander parallel sind. Earhart findet, daß das Funkenpotential oberhalb des kritischen Druckes (das ist jener Druck, bei dem das Funkenpotential bei gegebener Elektrodendistanz ein Minimum ist) durch ein longitudinales Magnetfeld *nicht* beeinflußt wird.²⁾ Unterhalb des kritischen Druckes wird das Funkenpotential durch das Magnetfeld herabgesetzt, und diese Erniedrigung hängt etwas von dem Querschnitte der Funkenstrecke ab. Das Minimumpotential in Luft ohne Magnetfeld bestimmt Earhart schwankend zwischen 356 und 400 Volt. Quantitative theoretische Überlegungen werden nicht angestellt.

Versuchsanordnung.

§ 6. Fig. 1 gibt eine schematische Darstellung der Anordnung. Die Funkenstrecke ist, ähnlich wie die von Carr³⁾,

1) R. F. Earhart, Phys. Rev. (2) 4. p. 135. 1914.

2) Die von Earhart gefundene Beeinflussung desjenigen Potentials, das notwendig ist, um die selbständige Entladung zu unterhalten, interessiert hier deshalb nicht, weil für diesen Fall die Verzerrung des elektrischen Feldes unübersehbare Komplikationen herbeiführt.

3) W. R. Carr, Proc. and Trans. Roy. Soc. Canada (2) 8. Section III. p. 161. 1902 und Trans. Roy. Soc. London (A) 201. p. 403. 1903; fälschlich oft zitiert als Proc. Roy. Soc. London 71. p. 374. 1903, hier befindet sich nur ein ganz kurzer Auszug aus der Arbeit von Carr. Vgl. auch: J. J. Thomson, Elektrizitätsdurchgang p. 380.

folgendermaßen gebaut. *A* und *B* stellen die Elektroden aus Messing dar. Sie haben einen Durchmesser von 21 mm und sind in Zylinder aus Ebonit *EE* von 24,5 mm Durchmesser eingebettet. Die Vorderseite ist plan abgedreht und sauber poliert. Gut planparallele Hartgummiringe *R* von 24,5 mm äußerem, 8,1 mm innerem Durchmesser (falls es nicht anders angegeben ist) und verschiedenen Höhen (ca. 1—5 mm)

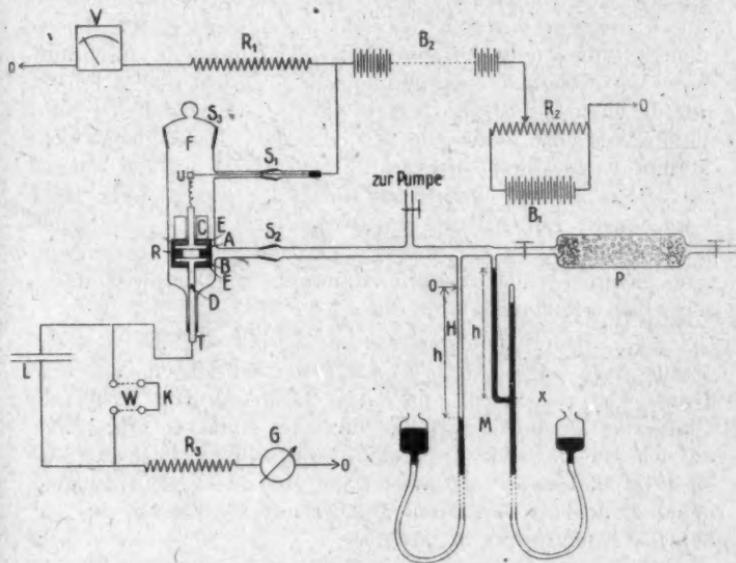


Fig. 1.

halten die Elektroden voneinander entfernt und definieren die Funkenlängen. Die Höhen dieser Ringe, die mit einem Komparator von Zeiss gemessen wurden, differierten an verschiedenen Stellen um wenige Tausendstel Millimeter, so daß die späteren Angaben auf $\pm 0,005$ mm genau sind. Die innere Bohrung der Ringe ist so viel kleiner als der Durchmesser der Elektroden, um im Bereiche der Funkenstrecke ein vollkommen homogenes elektrisches Feld zu garantieren. Die Elektrode *B* besitzt an ihrem rückwärtigen Fortsätze bei *D* eine kleine Ausbohrung, vermittelst der sie auf der Messingstange *T* aufsitzt. Um eine Funkenlänge von exakt

bekannter Größe zu haben, saßen die Stücke *A*, *R* und *B* ohne jede Kittung aufeinander und wurden nur durch das aufgesetzte Messinggewicht *C* zusammengepreßt. Das Ganze befand sich in dem luftdichten Glasgefäß *F* (Höhe 18 cm, Durchmesser außen 2,7 cm). Die Ringe *R* hatten noch eine enge Bohrung von 0,6 mm Durchmesser, die exakt senkrecht zu ihrer Achse verlief, um den Druckausgleich zu gestatten. Die Zuführung zu den Elektroden geschah einerseits durch den eingekitteten Stab *T*, andererseits durch den in dem Schliffe *S₁* eingekitteten Draht, der durch eine einschraubbare Vorrichtung *U* Verbindung mit der Elektrode *A* erhielt, wie die Figur zeigt. Durch den Schliff *S₂* war *F* mit der Luftpumpe und dem Manometer *M* verbunden. Die Funkenstrecke konnte leicht durch den Schliff *S₃* entfernt werden, einmal um sie zu putzen, dann auch um Ringe von anderer Höhe einzusetzen. Zur Kittung diente der bekannte weiße Siegelack Nr. 849 A von Liliendahl in Neudietendorf (Thüringen), zum Schmieren der Schliffe Ramsayfett. Durchweg waren nur Glasverbindungen vorhanden.

§ 7. Das Evakuieren geschah vermittelst der Kolbenpumpe von Gaede.¹⁾ *P* ist ein Trockenrohr, daß auf eine Länge von ca. 15 cm mit einem Gemische von P_2O_5 und Glasperlen beschickt war, und das zum Abhalten von Staub an den Enden große dichte Glaswollepropfen enthielt. Das Mc Leod-Manometer *M*, das für die Messung verhältnismäßig hoher Drucke (0,5—25 mm Hg) gebaut ist, erlaubt bis ca. 33fache Kompression herzustellen.

Bei der Druckmessung mit dem Mc Leod-Manometer wird durch das Aufsteigen des Quecksilbers in dem Steigrohre das Gas in dem Entladerohr *F* und den damit in Verbindung stehenden Glasröhren komprimiert, wodurch der Druck hier steigt. Das veranlaßt in der Druckmessung bei den verwendeten Größenverhältnissen einen nicht zu vernachlässigenden Fehler.²⁾ Um diesen zu vermeiden, war noch ein zweites Glasrohr *H* von derselben lichten Weite wie das Steigrohr des Mc Leod-Manometers angebracht. In diesem Rohre wurde

1) W. Gaede, Phyaik. Zeitechr. 14. p. 1238. 1913.

2) Bei einer Funkenlänge von 4,05 mm und bei einem Drucke von ca. 2,2 mm Hg beträgt in Luft die Erhöhung des Funkenpotentials durch diese Kompression ca. 11 Volt.

Hg um dieselbe Höhe h (von einem willkürlich gewählten Nullpunkte an) gesenkt, wie das Hg in dem Steigrohre über den Punkt X anstieg. Auf diese Weise bleibt das ganze Volumen konstant, und der Fehler ist eliminiert. Die Genauigkeit der Druckmessung beträgt bei den kleinen Drucken ca. 2, bei den größten ca. 15 Einheiten der zweiten Dezimalen.

§ 8. Die obere Elektrode A war mit dem einen Pole einer Hochspannungs-Akkumulatorenbatterie B_2 (1500 Volt in Stufen von je 50 Volt veränderlich) verbunden. Der andere Pol der Batterie lag an dem Ruhstratschen Schiebewiderstand R_2 (1700 Ohm), durch den die recht konstante städtische Zentrale B_1 (220 Volt) geschlossen war. So konnte eine kontinuierliche Spannungsänderung von Null bis ca. 1700 Volt hergestellt werden. Die Spannung wurde mit einem guten, nachgezeichneten Millivoltmeter V von Siemens & Halske (Meßbereich 1500 Volt) gemessen. R_1 ist der Vorschaltwiderstand des Voltmeters, die Ablesegenauigkeit betrug 1 Volt.

Die untere Elektrode B war über die Wippe W , den Schutzwiderstand R_3 ($5 \cdot 10^6$ Ohm) und das Paschensche Panzergalvanometer $G^1)$ zur Erde abgeleitet. Die Stromempfindlichkeit des Galvanometers betrug $8,8 \cdot 10^{-10}$ Amp. bei einem inneren Widerstande von 4700 Ohm. L ist eine sehr gut isolierende Glimmerkapazität von 0,01 Mikrofarad, K ein Kurzschlußbügel.

Die Funkenstrecke war so zwischen den Polen eines Elektromagneten aufgestellt, daß das homogene elektrische Feld zwischen A und B senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien stand.

§ 9. Zum Erzeugen der Magnetfelder diente teils ein Elektromagnet von Ruhmkorffscher Art, teils ein solcher mit Wasserkühlung, der nach der Angabe von Hrn. Paschen im Tübinger Physikalischen Institute gebaut worden war. Die Magnetfeldmessungen geschahen vermittelst eines ballistischen Galvanometers mit verschiedenen Probespulen, die aus dem Felde herausgezogen und gleichzeitig mit einer nach Paschen²⁾ konstruierten Vorrichtung um 90° gedreht wurden,

1) F. Paschen, Physik. Zeitschr. **14**. p. 521. 1913.

2) A. Stettenheimer, Ann. d. Phys. **24**. p. 384. 1907.

so daß ein Streufeld in der Endlage der Spule keinen Fehler verursachte. Die Eichung der Probespulen geschah einmal in zwei von Paschen¹⁾ angegebenen und von ihm ausgewerteten Normalspulen. Bei einer zweiten Methode wurde eine Probespule von bekannter Windungsfläche in Verbindung mit dem wechselseitigen Induktionsnormal des Tübinger Institutes verwendet. Die Konstanten dieser Apparate waren von Gans und Gmelin²⁾ sorgfältig bestimmt worden, ihre gemessenen Werte wurden benutzt. Beide Methoden ergaben sehr gut übereinstimmende Resultate. Die öftere Kontrolle der Feldmessungen stimmten immer auf weniger als 0,5 Proz. überein. Die Feldmessungen wurden sorgfältiger ausgeführt, als es eigentlich notwendig war; so sind z. B. auch die geringen Änderungen der Empfindlichkeit des ballistischen Galvanometers mit dem Ausschlage berücksichtigt.

Die Homogenität der Magnetfelder war über den Bereich der Funkenstrecke auf 0,3 Proz. gewahrt, was durch passend geformte Polschuhe erreicht wurde. Die einzelnen Magnetfeldstärken wurden durch langsames *stetiges* Steigen des Stromes, der an einem guten Milliampermeter von Siemens & Halske mit Nebenschluß abgelesen wurde, eingestellt. Sollte das Funkenpotential dann wieder bei der Feldstärke Null gemessen werden, so wurde vorher immer durch abnehmende Kommutierung entmagnetisiert. Die Entmagnetisierung war vollständig, wie Kontrollversuche mit der Probespule ergaben.

Messmethode:

§ 10. Die beschriebene Versuchsanordnung erwies sich als die beste von mehreren probierten. Zur Messung des Funkenpotentials wurde wie folgt vorgegangen. Während der Kurzschlußbügel *K* eingeschaltet war, wurde das Potential von *A* bis wenige Volt (ca. 10—20 Volt) unterhalb des Funkenpotentials gesteigert. Dann wurde durch Umlegen der Wippe *W* der Kurzschlußbügel *K* ausgeschaltet, wodurch die Kapazität *L* als Blockkondensator wirkte. Bei weiterer langsamer Steigerung des Potentials setzte dann momentane, sofort wieder aussetzende Entladung zwischen den Elektroden ein, was

1) F. Paschen, Physik. Zeitschr. 6. p. 371. 1905.

2) R. Gans u. P. Gmelin, Ann. d. Phys. 28. p. 925. 1909.

sich durch einen kurzen Stromstoß im Galvanometer anzeigte. Hierauf wurde am Voltmeter die Spannung abgelesen. Um die Funkenverzögerung zu vermeiden, befand sich in der Nähe der Entladungsstrecke ein RaBr_2 -Präparat von 5 mg.

War das Funkenpotential auf diese Weise bestimmt, so wurde die Spannung etwas erniedrigt, K für einen Moment eingeschaltet, um die Kapazität L zu entladen, K wieder ausgeschaltet und die Bestimmung des Funkenpotentials in der angegebenen Art wiederholt. Jedes später bei den endgültigen Messungen angeführte Funkenpotential ist das Mittel aus mindestens drei solchen Bestimmungen.

Als einziges Gas wurde staubfreie, trockene, aber vom Kohlensäuregehalt nicht befreite, atmosphärische Luft untersucht.

Kontrollmessungen.

Im folgenden werden die Messungen beschrieben, die angestellt wurden, um einerseits die richtige Art der Meßmethode zu finden, andererseits, um die Genauigkeit der Ergebnisse zu erproben.

§ 11. Bei den Vorversuchen waren in der Funkenstrecke als Elektroden Kugeln (1,5 cm Durchmesser) sowie schwach konvexe Platten verwendet worden. Es zeigte sich aber bei den Kugelektroden, daß man für das Funkenpotential als Funktion des Druckes nicht den bekannten Verlauf erhielt. Der Grund dafür liegt darin, daß unterhalb des kritischen Druckes¹⁾ einem längeren Funken ein geringeres Potential entspricht. Es wird deswegen in diesem Gebiete der Funken nicht mehr an der kürzesten Entfernung der beiden Kugeln überspringen, sondern er wird seitlich herauswandern. Damit ist dann die Funkenlänge nicht mehr eindeutig definiert.²⁾ Die schwach konvexen Platten ergaben zwar etwas bessere Resultate, doch zeigten Kontrollversuche mit Glimmentladungen, daß bei niedrigen Drucken die leuchtende Entladung an den Plattenrändern, bei höheren Drucken aber zentrisch in der Mitte ansetzte. Um den Fehler ganz zu ver-

1) Kritischer Druck wird derjenige genannt, für den das Funkenpotential bei gegebener konstanter Funkenlänge ein Minimum ist.

2) Das Übersehen dieses Punktes macht die Beobachtungen von Righi (l. c.) wertlos.

meiden, um also wohldefinierte Funkenlängen zu besitzen, wurde die in § 6 beschriebene Funkenstrecke gebaut. Ein besonderer Versuch mit Glimmentladung zeigte auch, daß nicht etwa das Loch für den Druckausgleich in den Ringen R der Entladung einen anderen Weg bot.

§ 12. Die Konstanz des Funkenpotentials V erwies sich als eine ausgezeichnete. Folgende hintereinander angestellten Beobachtungen mögen das zeigen.

Funkenlänge etwa 5 mm; Druck < 1 mm Hg.

$V = 1103$ Volt	1104 Volt	
1105	1105	Mittel: 1103,9 Volt;
1105	1105	mittlere Abweichung vom Mittelwert:
1103	1103	0,9 Volt.
1102	1104	

§ 13. Es wäre möglich, daß das verhältnismäßig starke RaBr_2 -Präparat durch zu intensive Ionisation eine Feldverzerrung hervorgerufen hätte, wodurch außer der gewünschten Aufhebung der Verzögerung auch eine Funkenpotentialerniedrigung eingetreten wäre. Daß das nicht der Fall ist, zeigt z. B. folgende Messung, bei der das Radium sich einmal in einer Entfernung von ca. 2 cm von der Mitte der Funkenstrecke befand, dann in einer Entfernung von ca. 9 cm, so daß sich die Ionisationen in beiden Fällen verhalten wie ca. 1 : 20. Die gemessenen Funkenpotentiale stimmen innerhalb der Fehlergrenze überein.

Funkenlänge etwa 4,2 mm; Druck 0,91 mm Hg.

Entfernung des Ra	V
2 cm	368; 368; 369
9 cm	370; 369; 369

§ 14. Die Größe des Schutzwiderstandes R_s hatte keinen Einfluß auf das Funkenpotential, wie durch Kontrollmessungen festgestellt wurde als R_s ausgeschaltet war.

§ 15. Die Werte des Funkenpotentials sind vollkommen unabhängig davon, ob die Richtung des elektrischen oder des magnetischen Feldes um 180° gedreht wird, ein Zeichen dafür, daß vollständige Symmetrie vorhanden ist.

§ 16. Die Prüfung ergab, daß die Verwendung der Kapazität L (vgl. Fig. 1) als Blockkondensator richtige Werte des Funkenpotentials liefert. Zu diesem Zwecke wurden Ver-

gleichsmessungen angestellt, einmal wenn die Kapazität, dann wenn der Kurzschlußbügel K eingeschaltet war. Die Werte waren absolut identisch, allerdings unter der Voraussetzung, daß so gemessen wurde, wie in § 10 auseinandergesetzt ist, um Aufladungen der Kapazität zu vermeiden. Auch zeigte sich, daß nicht etwa die Kapazität während der Zeit, in der sie durch K nicht kurzgeschlossen war, durch mangelhafte Isolation des Ebonits in der Funkenstrecke oder des Glasgefäßes F langsam aufgeladen wurde, wodurch Fehler hätten verursacht werden können. Das wurde dadurch erwiesen, daß das gemessene Funkenpotential unabhängig davon war, wie lange Zeit (5''—2') zwischen dem Anlegen der Kapazität und dem Funkenübergang verstrich. Diese ganze Schaltung war aus dem Grunde gewählt worden, um zu starke Energieumsetzung im Funken zu vermeiden, da sonst scheinbar von den Elektroden Gas abgegeben wurde, welches das Funkenpotential nach einem Funkenübergang änderte. 0,01 Mikrofarad erwies sich als passende Kapazität, da 2 und 0,1 Mikrofarad zu große Ausschläge des empfindlichen Galvanometers verursachten.

§ 17. Um konstante und reproduzierbare Werte des Funkenpotentials zu erhalten, stellte es sich als unumgänglich notwendig heraus, immer *frisches* Gas zu verwenden. Es ergab sich nämlich, daß das Funkenpotential in Luft wahrscheinlich außerordentlich empfindlich gegen geringe Verunreinigungen ist, ein Punkt, den die bisherigen Beobachter nicht genügend berücksichtigt haben. Diese Empfindlichkeit erinnert an die von Warburg gefundene Beeinflussung des Kathodengefäßes¹⁾ sowie an die der Spitzentladung²⁾ durch minimale Verunreinigungen.

Um zu zeigen, wie dieser Einfluß der Verunreinigungen wirkt, sei als Beispiel ein Versuch angeführt, der mit Kugelektroden ausgeführt war. Es wurde von einem Drucke von $p = 0,95$ mm Hg ausgegangen. Nachdem die Luft sich ca. 4 Stunden im Gefäße befunden hatte, wurde sukzessive frische Luft bis zu einem Drucke von $p = 28,3$ mm Hg zugelassen und jeweils das Funkenpotential bestimmt. Darauf wurde

1) E. Warburg, Sitzungsber. d. Berliner Akad. **40**. p. 770. 1890,
und Ann. d. Phys. **2**. p. 295. 1900.

2) E. Warburg, Wied. Ann. **31**. p. 545. 1887.

sukzessive evakuiert und wieder V gemessen. Bei diesem Vorgehen ist bei steigendem Drucke das Volumenverhältnis zwischen alter und frischer Luft um so größer, je früher die Messung angestellt wurde. Tab. 1 gibt die Versuchsresultate, Fig. 2 die graphische Darstellung, bei der die laufenden Nummern der Einzelmessungen angegeben sind.

Tabelle 1.
Funkenlänge etwa 1 mm.

Nummer des Versuches	p in mm Hg	V in Volt	\bar{V} (Mittel)	Bemerkungen
1	0,95	393, 393, 393	393	
2	3,62	358, 358, 357	358	
3	4,54	351, 352, 353	352	
4	6,15	345, 344, 345	345	
5	7,50	341, 342, 342	342	
6	13,5	345, 343, 344	344	
7	15,5	349, 350, 349	349	
8	18,7	364, 367, 367	366	
9	28,3	421, 423, 422	422	
10	24,4	396, 397, 397	397	
11	21,2	379, 378, 379	379	
12	17,8	361, 361, 361	361	
13	11,5	342, 342, 342	342	
14	7,0	345, 344, 344	344	
15	2,77	355, 356, 355	355	
16	0,84	366, 365, 366	366	
17	0,36	385, 384, 384	384	
18	0,58	394, 397, 397	396	Messung nach 12 Stunden

Aus diesen Versuchen ist zu ersehen, daß mit größerem Prozentgehalte an alter Luft das Funkenpotential ansteigt. Nachdem nach dem Versuch Nr. 17 das Gas 12 Stunden ruhig im Apparate belassen war, zeigte das Funkenpotential (Versuch Nr. 18) wieder einen höheren Wert, der gut mit den Werten für altes Gas koinzidiert. Wurde dagegen die Kurve in derselben Weise mit frischem Gase aufgenommen, so stimmten die Funkenpotentiale bei Druckerhöhung und Druckerniedrigung gut überein.

Ein anderer Versuch ergab folgendes. Hatte die Luft 48 Stunden im Apparate gestanden, so war bei $p = 0,74$ mm $V = 447$ Volt. Nach Einlassen von frischer Luft wurde bei demselben Drucke gefunden $V = 354$ Volt.

Es fragt sich nun, worauf diese Erscheinung zurückzuführen ist.

§ 18. Ein Mangel bei der Dichtebestimmung erscheint ausgeschlossen; denn einmal erwies sich das Gefäß als vollkommen luftdicht, ferner wurde bei jedem Versuche der Druck neu bestimmt, und hierdurch wäre auch nicht das Verschwinden des Effektes bei Verwendung von frischer Luft zu erklären.

Man könnte ferner daran denken, daß durch Temperaturänderungen eine Veränderung der Elektrodendistanz und der Dichte der Luft hervorgerufen worden wäre. Wie aber besondere Versuche mit den in Betracht kommenden Temperaturdifferenzen lehrten, ist das nicht der Fall.

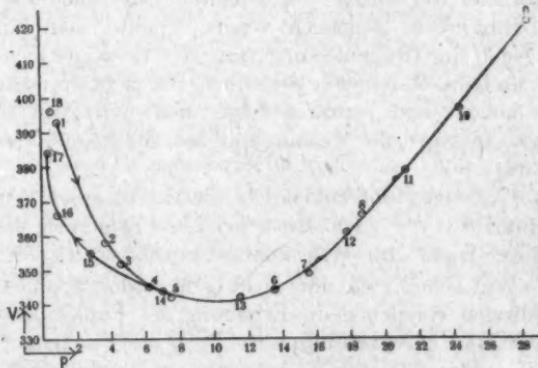


Fig. 2.

Es könnte auch durch den Funkenübergang irgendein Gas aus den Elektroden frei werden. Eine derartige Gasentwicklung findet bei *starken* Funken, falls die Blockkapazität nicht eingeschaltet ist, zweifellos statt, da hinterher immer sofort eine Erhöhung des Funkenpotentials zu bemerken ist, wenn man sich oberhalb des kritischen Druckes befindet.¹⁾ Aber bei Verwendung der Blockkapazität ist dieser Effekt nur nach einer größeren Anzahl von Funken zu bemerken. Diese Gasentwicklung kann auch deswegen nicht die Ursache der beschriebenen Erscheinung sein, weil die Potentialerhöhung auch

1) Unterhalb des kritischen Druckes ist das Umgekehrte der Fall.

bei ruhig stehendem Gase eintritt, wie die Versuche von Tab. 1 (Nr. 17 und 18) lehren.

§ 19. Es wäre noch die Feuchtigkeit in Betracht zu ziehen. Feuchte Luft zeigt ein höheres Funkenpotential als trockene Luft. So wurde z. B. bei homogenem elektrischen Felde und der Funkenlänge 4,05 mm das Entladegefäß 5 mal mit Luft gefüllt, die durch Wasser hindurchgeperlt war, und bei einem Drucke von $p = 600$ mm Hg das Ganze $\frac{1}{2}$ Stunde stehen gelassen. Darauf wurde bis zu einem Drucke von 1,86 mm Hg, der in der Nähe des kritischen Druckes liegt, ausgepumpt. Das Funkenpotential ergab sich zu $V = 410$ Volt gegen $V = 337$ Volt unter denselben Bedingungen bei trockener Luft. Da hier der Druck der feuchten Luft auch mit dem Mc Leod-Manometer gemessen wurde, könnte man Einwendungen gegen die Druckmessung machen. Es zeigte sich aber, daß das Mc Leod-Manometer denselben Druck für verschiedene Kompressionen ergab, woraus folgt, daß der Wasserdampf nicht gesättigt, also eine Messung mit dem Mc Leod-Manometer erlaubt war.

Dieser Versuch steht wohl in Übereinstimmung mit Beobachtungen von Bouthy¹⁾, nach denen bei $p = 1,86$ mm Hg die „cohésion diélectrique“ für Wasserdampf größer ist als für Luft.

Trotzdem scheint es mir nicht sehr wahrscheinlich, daß in den übrigen Versuchen die Erhöhung des Funkenpotentials auf Feuchtigkeit zurückzuführen ist, denn das Funkenpotential der im Entladegefäß stehenden trockenen Luft nimmt auch dann mit der Zeit zu, falls das Gefäß sehr gut durch Auspumpen und nachhaltiges Spülen mit entfeuchteter Luft getrocknet ist, so daß an eine Wasserdampfabgabe von den Gefäßwänden her kaum gedacht werden kann.

Diese Auffassung wird auch noch durch folgendes gestützt. Thomson²⁾ hat darauf aufmerksam gemacht, daß das minimale Funkenpotential wahrscheinlich nahe identisch ist mit dem normalen Kathodenfall. Nun fand aber Warburg³⁾, daß das normale Kathodengefälle in schwach feuchter Luft kleiner (341 Volt), Capstick⁴⁾, daß es in reinem Wasser-

1) E. Bouthy, C. R. 131, p. 469 u. 503. 1900.

2) J. J. Thomson, Recent Researches, § 162. p. 158.

3) E. Warburg, Wied. Ann. 31, p. 559. 1887.

4) J. W. Capstick, Proc. Roy. Soc. London 63, p. 356. 1898.

dampf größer (469 Volt) ist als in trockener Luft (388 Volt).¹⁾ Es ist vielleicht erlaubt, ein ähnliches Verhalten²⁾ bei dem hier beobachteten Funkenpotential anzunehmen. Tut man dieses, und wird bedacht, daß bei den vorliegenden Versuchen nur überhaupt geringe Feuchtigkeitsgrade vorkommen können, so wäre die Erhöhung des Funkenpotentials unmöglich durch den Feuchtigkeitsgehalt zu erklären, da, bei dem Stehen der trockenen Luft in dem vom P_2O_5 -Behälter abgeschlossenen Entladungsrohre, höchstens eine Erhöhung der Feuchtigkeit durch Abgabe von Wasserdampf von den Wänden und damit eine Erniedrigung des Funkenpotentials eintreten könnte.

Eindeutig ist aber jedenfalls durch diese Versuche und Überlegungen der Einfluß des Wasserdampfes noch nicht geklärt. Es sollen baldigst Versuche unternommen werden, um die Wirkung sehr geringer Feuchtigkeitsgrade zu untersuchen.

§ 20. Haben die Elektroden längere Zeit zu Versuchen gedient, so tritt auch allmählich eine Erhöhung des Funkenpotentials in frischer Luft ein. Aber ein leichtes Putzen der Elektroden mit feinstem Schmirgelpapier und nachheriges Abreiben mit einem trockenen Leinenlappen stellt wieder die niedrigen Funkenpotentiale her. Ein Beispiel mag dies zeigen. Nachdem bei einem Elektrodenabstande von $l = 1,962$ mm 147 Funken erzeugt worden waren, ergab sich das Funkenpotential etwas zu hoch; es wurde bei $p = 2,83$ mm $V = 353$ Volt gefunden. Darauf wurde die Funkenstrecke auseinander genommen und geputzt. Die Messung ergab jetzt bei demselben Drucke $V = 330$ Volt. Wie häufig dieses Putzen zu wiederholen ist, hängt von der Elektrodendistanz ab. Bei der kleinsten Funkenlänge von $l = 0,960$ mm mußte nach höchstens 45, bei der größten von $l = 4,926$ mm nach ca. 100—140 Funken der Reinigungsprozeß ausgeführt werden. Dieses ist eine sehr wichtige Vorsichtsmaßnahme, auf die auch die älteren Beobachter³⁾ des Funkenpotentials bei geringen Drucken nicht geachtet haben.

Um sicher zu sein, daß die Elektroden trotz des häufigen

1) E. Warburg, Wied. Ann. **31**, p. 559. 1887.

2) Stickstoff zeigt gegenüber Feuchtigkeit dasselbe Verhalten wie Luft. Vgl. E. Warburg, Wied. Ann. **31**, p. 562. 1887.

3) Z. B.: R. J. Strutt, Trans. Roy. Soc. London (A) **193**, p. 377. 1900. — W. R. Carr, Trans. Roy. Soc. London (A) **201**, p. 403. 1903.

Putzens eben blieben, wurden sie während der Untersuchung öfter auf der Drehbank wieder plan abgedreht.

§ 21. Auf Grund der Erfahrungen in den §§ 11—20, die darauf hindeuten, daß bei längerem Stehen die Luft im Entladerohr irgendwie geändert wird, wurde bei den endgültigen Funkenpotentialmessungen so vorgegangen. Vor jeder Messung wurde der Apparat bis auf ca. 1 mm Hg ausgepumpt und dann mit frischer¹⁾, trockener, staubfreier, atmosphärischer Luft von Atmosphärendruck gefüllt. Dieses wurde 3 mal wiederholt und dann der Druck eingestellt, bei dem beobachtet werden sollte. Die Luft strömte dabei mit kleiner Geschwindigkeit durch das P_2O_5 -Gefäß. Es wurde auch genügend lange Zeit gewartet, damit sich volliger Druckausgleich zwischen dem Mc Leod-Manometer und dem durch die enge Bohrung abgeschlossenen Volumen der Funkenstrecke herstellen konnte. Gemessen wurde (je 3 Ablesungen) bei dem Magnetfelde Null, dann bei drei verschiedenen Magnetfeldstärken, worauf die erste Messung wiederholt wurde. Messung 1 und 5, die gemittelt werden, stimmen immer recht gut überein. Die Temperatur wurde von einem $\frac{1}{10}^{\circ}$ Thermometer notiert.

Eine aus dem Beobachtungsjournal willkürlich herausgegriffene Einzelmessung möge als Beispiel dienen. Die überstrichenen Größen sind Mittelwerte, J ist die Magnetisierungsstromstärke, H das dazu gehörige Magnetfeld in Gauss.

Datum: 8. 7. 1915.
Elektroden frisch gereinigt. 5 mal mit trockener Luft gespült.
 $l = 1,962$ mm; $t = 20^{\circ}7$; $p = 4,55$ mm.

J	V	\bar{V}	\bar{J}	δ	\bar{V}
0	352, 352, 351	352	0	0	352
1,28	352				
1,28	352	352	1,28	350	352
1,28	352				
4,35	369				
4,34	368	369	4,34	1161	369
4,33	369				
8,40	392				
8,38	393	392	8,38	1884	392
8,36	392				
0	352, 353, 352	352	0	0	

1) Bei diesen Füllungen wurde im Zimmer durch Öffnen der Fenster Durchzug hergestellt, um frische Luft im Zimmer zu haben.

§ 22. Zu erwähnen ist noch, daß nur äußerst selten die von Faraday¹⁾ gefundene Erscheinung beobachtet wurde, daß oft zum Einsetzen des *ersten* Funkens ein größeres Potential notwendig ist, als für die folgenden Funken. Bei den Versuchen von Strutt²⁾ kam das häufig vor.

§ 23. Über die Genauigkeit der endgültigen Resultate, die in § 24 in graphischer Darstellung gegeben werden, ist folgendes zu sagen. Wie das Beispiel des § 21 zeigt, stimmen die Einzelmessungen sehr gut in sich überein. Abweichungen, die größer sind als 3 Volt, kommen nur äußerst selten vor, falls die Drucke oberhalb des kritischen liegen. Weit unterhalb des kritischen Druckes können größere Schwankungen, maximal ca. 20 Volt, vorkommen. Wegen der vielen in den §§ 11—20 beschriebenen Schwierigkeiten ist leicht zu verstehen, daß voneinander unabhängige Messungen weniger genau übereinstimmen als die Einzelmessungen in sich. Die Kurven der Fig. 3 geben Beispiele davon.

Die Kurvenwerte (Figg. 3—7), welche alle Einzelmessungen graphisch mitteln, dürften oberhalb der kritischen Drucke auf ± 5 Volt sicher sein, unterhalb der kritischen Drucke aber, dort wo das Funkenpotential so außerordentlich stark mit abnehmendem Drucke ansteigt, dürfte als Genauigkeitsgrenze vielleicht ± 15 Volt anzugeben sein. Selbstverständlich können sich diese Schätzungen nur auf die zufälligen, nicht auf die systematischen Fehler beziehen. Es mag dahingestellt bleiben, ob nicht etwa für die Funkenpotentiale bei noch vorsichtigerer Arbeit tiefere Werte erhalten würden.

Meßresultate.

§ 24. Von den endgültigen Messungen werden fünf Serien mit verschiedener Elektrodendistanz l angegeben. Die Messungen einer Serie ($l = 2,979$ mm) sind ausführlich in Tab. 2 aufgeführt, in Fig. 3 graphisch dargestellt, um über die Genauigkeit ein Urteil zu gestatten. Die vier übrigen Reihen werden nur graphisch in den Figg. 4—7 gegeben; zur Kontrolle sind in der Tab. 3 einige Werte, die diesen Kurven entnommen sind, zusammengestellt. Die jeweils verwendeten

1) M. Faraday, *Experimental Researches*, § 1417.

2) R. J. Strutt, *Trans. Roy. Soc. London (A)* 198, p. 382. 1900.

Magnetfelder schwanken, ebenso wie die bei Tab. 2, zwischen den äußersten Grenzen

331	und	350	Gauss;	als	Mittelwert	gilt	etwa	350	Gauss
1158	"	1170	"	;	"	"	"	1160	"
1875	"	1891	"	;	"	"	"	1885	"

In den Tabellen bedeutet: l die Funkenlänge in Millimetern, t die Temperatur in Celsiusgraden, p den Druck in mm Hg, \mathfrak{G} das Magnetfeld in Gauss und V das Funkenpotential in Volt. Bei Tab. 3 sind unter t die äußersten Grenzen der Temperatur bei der ganzen Serie angegeben.

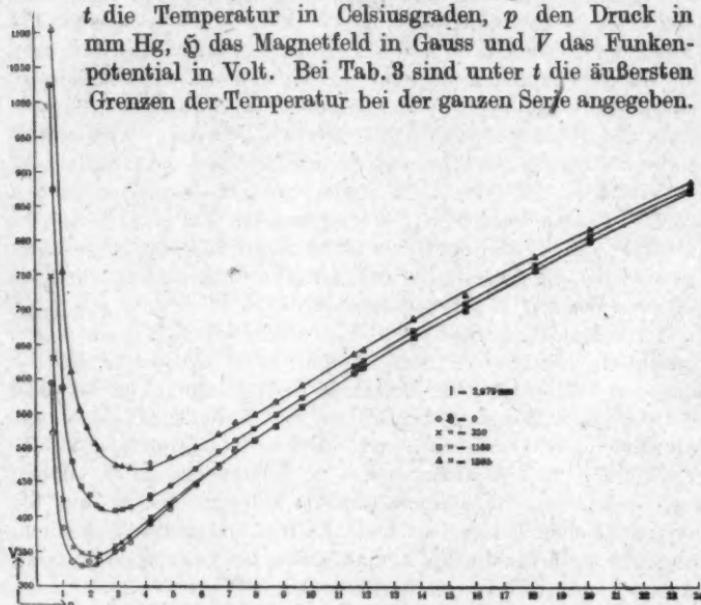


Fig. 3.

Tabelle 2.

 $l = 2,979$ mm

Datum	t	p	\mathfrak{G}	V	$p \cdot l$
5. 8. 1915	19,7	4,16	0	392	12,39
			350	399	
			1164	431	
			1885	478	
,,	19,8	7,24	0	496	21,57
			350	498	
			1161	512	
			1885	538	

Tabelle 2 (Fortsetzung).
 $l = 2,979 \text{ mm}$

Datum	t	p	Φ	V	$p \cdot t$
5. 8. 1915	19,9	11,56	0	611	34,44
			350	611	
			1162	620	
			1887	638	
,,	20,0	18,12	0	758	53,98
			350	759	
			1162	765	
			1885	778	
,,	20,0	2,89	0	351	8,61
			350	359	
			1162	409	
			1885	473	
,,	20,0	1,35	0	336	4,02
			350	356	
			1162	479	
			1884	611	

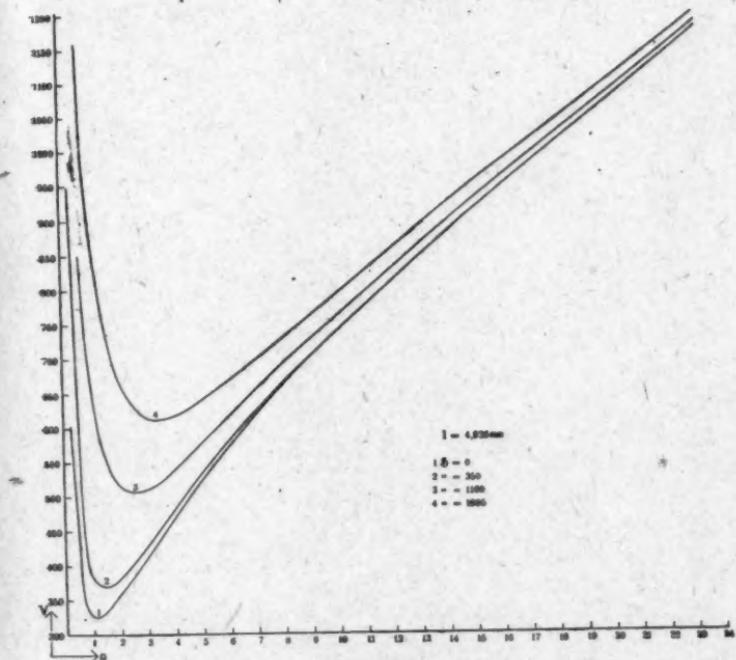


Fig. 4.

Tabelle 2 (Fortsetzung).

 $l = 2,979 \text{ mm}$

Datum	t	p	\bar{v}	V	$p \cdot l$
5. 8. 1915	20,0	2,31	0	338	6,88
			350	347	
			1162	411	
			1885	497	
	"	20,0	5,80	0	447
			350	449	17,28
			1162	469	
			1885	501	
6. 8. 1915	20,4	11,89	0	618	35,42
			350	618	
			1164	628	
			1885	643	

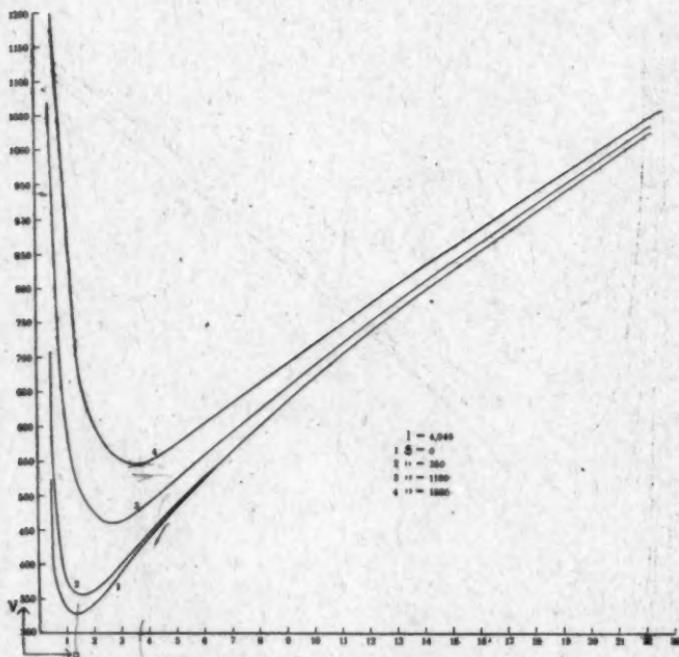


Fig. 5.

Tabelle 2 (Fortsetzung).

$l = 2,979 \text{ mm}$

Datum	t	p	δ	V	$l \cdot p$
6. 8. 1915	20,0	13,71	0	663	40,84
			350	663	
			1162	672	
			1885	688	
,,	20,0	9,66	0	561	28,78
			350	561	
			1162	574	
			1885	592	
,,	20,1	1,68	0	331	5,00
			350	348	
			1160	443	
			1883	554	

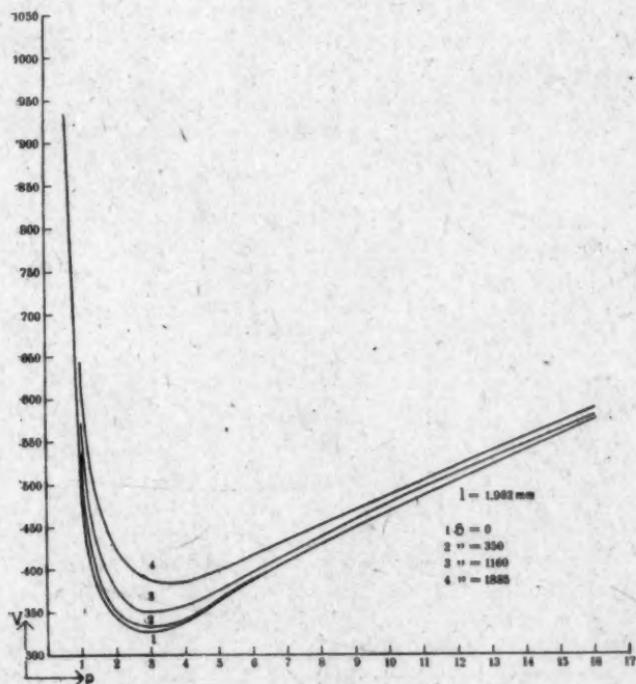


Fig. 6.

Tabelle 2 (Fortsetzung).
 $l = 2,979 \text{ mm}$

Datum	t	p	δ	V	$p \cdot t$
6. 8. 1915	20,1	0,58	0	595	1,73
			350	748	
			1158	1024	
,,	20,2	1,01	0	384	3,01
			350	424	
			1161	588	
			1883	755	
,,	20,2	1,94	0	336	5,78
			350	348	
			1160	430	
			1884	529	
7. 8. 1915	20,0	6,62	0	473	19,72
			350	476	
			1162	496	
			1885	521	
,,	20,2	8,71	0	532	25,95
			350	531	
			1162	548	
			1885	568	
,,	20,4	4,15	0	389	12,36
			350	390	
			1160	426	
			1883	471	
7. 8. 1915 600	20,4	3,14	0	355	9,35
			350	363	
			1158	410	
			1879	473	

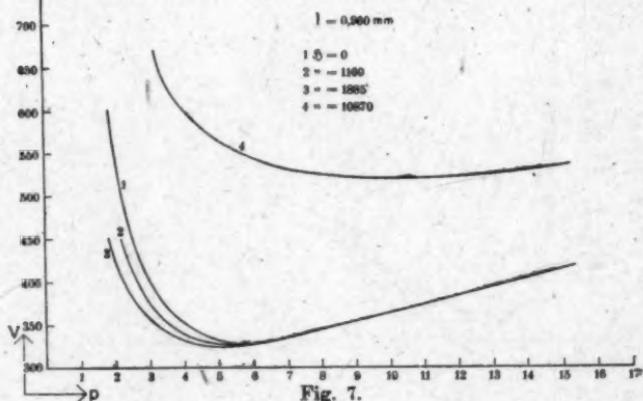


Tabelle 2 (Fortsetzung).

$l = 2,979 \text{ mm}$

Datum	t	p	\mathfrak{H}	V	$p \cdot l$
7. 8. 1915	20,5	4,87	0	412	14,51
			350	418	
			1161	445	
			1883	486	
9. 8. 1915	21,9	15,61	0	701	46,50
			350	701	
			1164	710	
			1885	722	
,,	21,9	2,20	0	331	6,55
			350	342	
			1164	416	
			1885	505	
,,	22,0	23,78	0	874	70,84
			350	874	
			1164	880	
			1887	889	
,,	21,4	3,42	0	365	10,19
			350	371	
			1164	413	
			1888	470	
,,	21,5	0,65	0	521	1,94
			350	631	
			1164	874	
			1887	1105	
,,	21,7	7,95	0	511	23,68
			350	512	
			1166	528	
			1889	549	
,,	21,8	20,13	0	801	59,97
			350	801	
			1164	809	
			1888	819	

Die in den Figg. 3—7 gegebenen Kurven stellen das Funkenpotential als Funktion des Druckes bei verschiedenen Magnetfeldern und Funkenlängen dar. Aus ihnen ist auch ohne weiteres jeder andere gewünschte funktionelle Zusammenhang zwischen den 4 Variablen V , p , l und \mathfrak{H} zu entnehmen.

Tabelle 3.

p	Φ	l	0,960		1,962		4,046		4,926	
			t		20,1—22,2		10,4—21,4		20,1—21,0	
			V	p.l	V	p.l	V	p.l	V	p.l
1,0	0	—	0,96	520	1,96	337	4,05	327	4,93	
	350	—	—	—	—	382	—	383	—	
	1160	—	—	—	—	622	—	674	—	
	1885	—	—	—	—	968	—	912	—	
2,0	0	546	1,92	344	3,92	342	8,09	359	9,85	
	350	546	—	351	—	361	—	381	—	
	1160	—	—	377	—	477	—	516	—	
	1885	423	—	427	—	608	—	674	—	
3,0	0	399	2,88	327	5,89	389	12,14	411	14,78	
	350	399	—	333	—	399	—	427	—	
	1160	374	—	350	—	461	—	510	—	
	1885	355	—	388	—	552	—	614	—	
4,0	0	351	3,84	338	7,85	439	16,18	469	19,70	
	350	351	—	341	—	444	—	482	—	
	1160	338	—	357	—	489	—	538	—	
	1885	331	—	385	—	548	—	617	—	
6,0	0	327	5,76	387	11,77	523	24,28	573	29,56	
	350	“	—	388	—	525	—	583	—	
	1160	“	—	396	—	557	—	616	—	
	1885	“	—	417	—	603	—	667	—	
8,0	0	345	7,68	429	15,70	600	32,37	663	39,41	
	350	“	—	429	—	600	—	665	—	
	1160	“	—	437	—	623	—	693	—	
	1885	“	—	452	—	660	—	729	—	
10,0	0	363	9,60	467	19,62	669	40,46	740	49,26	
	350	“	—	467	—	669	—	740	—	
	1160	“	—	477	—	687	—	763	—	
	1885	“	—	487	—	717	—	794	—	

Diskussion der Messungen.

§ 25. Zuerst sollen die Ergebnisse für das Magnetfeld $\Phi = 0$ besprochen und mit den bisherigen Beobachtungen verglichen werden. Die Kurven zeigen den bekannten charakteristischen Verlauf, Abnahme des Funkenpotentials mit abnehmendem Drucke bis zu einem Minimum bei dem kritischen Drucke sowie rasches Ansteigen des Funkenpotentials bei weiterer Druckverminderung. Die Minimumspotentiale V_0 , die sich vollständig unabhängig von der Funkenlänge ergeben, sind zusammen mit den zugehörigen kritischen Drucken p_0 ,

den Funkenlängen l sowie den Produkten $p_0 \cdot l$ in Tab. 4 zusammengestellt.

Tabelle 4.

l	V_0	p_0	$p_0 \cdot l$
0,960	326	5,90	5,66
1,962	327	2,90	5,68
2,979	329	1,90	5,66
4,046	328	1,40	5,67
4,926	326	1,15	5,67
Mittel:	327		5,67

§ 26. Die Produkte $p_0 \cdot l$ sind für die Minimumpotentiale sehr gut konstant. Es ist dieses nichts anderes als ein Ausdruck für das Paschensche Gesetz¹⁾, nach dem das Funkenpotential in einem Gase nur eine Funktion von dem Produkte aus Druck und Funkenlänge ist, oder besser ausgedrückt, nur abhängt von der Gesamtmasse des Gases zwischen den Elektroden pro Flächeneinheit.

§ 27. Zum Vergleich mit älteren Werten kommen nur die wahrscheinlich besten Beobachtungen von Strutt²⁾, Carr³⁾, Townsend⁴⁾ und Townsend u. Hurst⁵⁾ in Betracht; die Messungen von Peace⁶⁾ sind zu unsicher, seine Werte des Minimumpotentials schwanken zwischen 326 und 475 Volt. In Tab. 5 sind die bisher beobachteten Werte des Minimumpotentials sowie der Produkte $p_0 \cdot l$ zusammengestellt.

Tabelle 5.

	V_0	$p_0 \cdot l$
Strutt	341	5,62
Carr	350	5,91 ⁷⁾
Townsend	334	5,12
Townsend u. Hurst . . .	< 336	< 5,0
Earhart	356—400	6,0
Meyer	327	5,67

1) F. Paschen, Wied. Ann. **37**. p. 69. 1889.

2) R. J. Strutt, Trans. Roy. Soc. London (A) **193**. p. 377. 1900.

3) W. R. Carr, Trans. Roy. Soc. London (A) **201**. p. 403. 1903.

4) J. S. Townsend, Phil. Mag. (6) **6**. p. 598. 1903.

5) J. S. Townsend u. H. E. Hurst, Phil. Mag. (6) **8**. p. 738. 1904.

6) J. B. Peace, Proc. Roy. Soc. London **52**. p. 99. 1892—1893.

7) Carr (l. c. p. 410) hat einen nicht unbeträchtlichen systematischen Gang in den $p_0 \cdot l$ bei wachsendem l ; der Wert 5,91 ist das Mittel seiner Messungen.

Ich halte aus folgenden Gründen meinen Wert des Minimum-potentials, 927 Volt, sowie den des Produktes $p_0 \cdot l = 5,67$ für den sichersten. Strutt hatte den homogenen Teil des elektrischen Feldes seitlich nicht begrenzt; er hob die Verzögerung nicht auf und er verwendete länger im Apparate stehendes Gas. Carr vermied ebenfalls die Verzögerung nicht und arbeitete ebenso mit altem Gas. Sowohl Strutt wie Carr legten keinen besonderen Wert auf das Putzen der Elektroden. Townsend benutzte zwar auch keinen seitlichen Schutz des homogenen Teiles des elektrischen Feldes, doch werden seine Messungen wahrscheinlich hierdurch nicht beeinflußt, da er die Entladung durch den lichtelektrischen Effekt in der Mitte seines Kondensators auslöste. Aber auch er sowie Townsend und Hurst reinigten die Elektroden nicht häufig und gebrauchten länger im Apparate stehendes Gas. Ferner geben Townsend und Hurst selbst an, daß bei Vergrößerung ihres Schutzwiderstandes ($4,8 \cdot 10^4$ Ohm) um $2 \cdot 10^4$ Ohm das Funkenpotential um einige Volt größer war.

Auch sonst geben meine Versuche gegenüber denen von Townsend und Hurst meistens kleinere Werte. Ein willkürlich herausgegriffenes Beispiel mag das zeigen. Aus der Fig. 2 bei Townsend und Hurst entnehme ich für $p \cdot l = 20$ das Funkenpotential 495 Volt. Aus meinen Kurven ergibt sich:

$p \cdot l$	l	p	V
20	1,962	10,19	471
20	2,976	6,72	478
20	4,046	4,94	479
20	4,926	4,06	473
Mittel:			475 Volt

§ 28. Da die vorliegenden Funkenpotentiale nicht unerheblich kleiner sind als die von Carr, dieser aber zuletzt an seinen Versuchen das Paschensche Gesetz verifiziert hat, ist es vielleicht nicht überflüssig zu zeigen, daß auch meine Beobachtungen das Paschensche Gesetz sehr gut erfüllen. Zu diesem Zwecke sind in Fig. 8 die Funkenpotentiale als Funktion von $p \cdot l$ eingetragen und auch in den Tabl. 2 und 3 die zugehörigen Werte von $p \cdot l$ angegeben.

Man erkennt aus der Figur 8, daß das Paschensche Gesetz exakt erfüllt ist. Eigentlich sollte man V als Funktion von

$\sigma \cdot l$ darstellen, wo σ die Dichte der Luft bedeutet. Da aber alle Messungen in einem engen Temperaturintervall ausgeführt sind, so ist die Umrechnung auf die Dichte und die Berücksichtigung der Temperatur nicht wesentlich.

§ 29. Wir wenden uns nun zur Besprechung der Funkenpotentialkurven im Magnetfelde. Mit Ausnahme derjenigen für $l = 0,960$ zeigen alle Kurven, daß im transversalen Magnetfelde eine Erhöhung des Funkenpotentials auftritt, und zwar

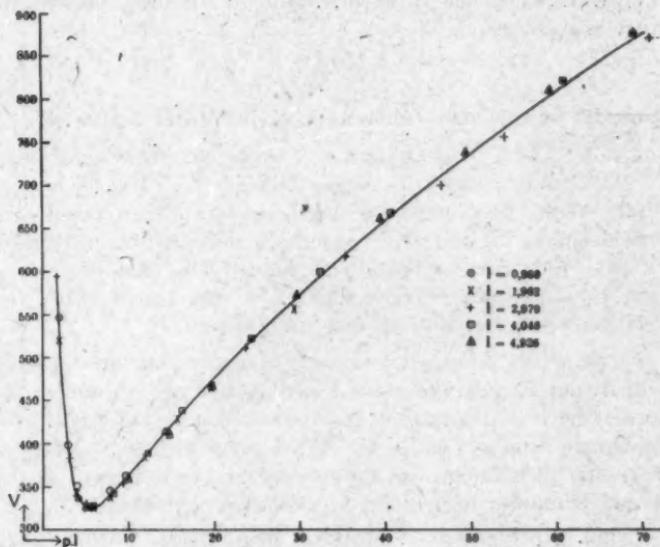


Fig. 8.

sowohl oberhalb als auch unterhalb des kritischen Druckes. Das steht in einem gewissen Gegensatze zu den Beobachtungen von Earhart (vgl. oben § 5), der fand, daß im longitudinalen Magnetfelde oberhalb des kritischen Druckes das Funkenpotential nicht beeinflußt, unterhalb aber vermindert wird.

Die Erhöhung des Funkenpotentials wächst mit der Stärke des Magnetfeldes sowie mit der Funkenlänge und nimmt oberhalb des kritischen Druckes mit wachsendem Drucke ab.

Das Minimumpotential im Magnetfelde ist ebenfalls erhöht und wird mit größeren Magnetfeldern zu höheren Drucken.

verschoben. Nennt man die Erhöhung des Minimumpotentials ΔV_0 , diejenige des kritischen Druckes Δp_0 , die sich am besten aus den Kurven $l = 2,98 - l = 4,93$ entnehmen lassen, so scheint ganz angenähert ΔV_0 und Δp_0 proportional \mathfrak{H} zu sein. Bei $l = 4,926$ ist diese Beziehung am besten erfüllt, bei den kleineren Funkenlängen steigt aber ΔV_0 schneller an als es der Proportionalität entspricht. Zu beachten ist hierbei, daß die Δp_0 nur ungenau aus den Kurven zu bestimmen sind. Immerhin mag bemerkt werden, daß für die drei betrachteten Kurven recht nahe

$$\frac{\Delta V}{l \cdot \Delta p}$$

konstant ist und den Zahlenwert 25 im Mittel besitzt.

§ 30. Bei der kleinsten verwendeten Funkenlänge $l = 0,960$ mm bewirken Magnetfelder von der bisherigen Größe keine Erhöhung des Funkenpotentials, sondern eine Erniedrigung, die aber *nur* unterhalb des kritischen Druckes auftritt und mit wachsendem Magnetfelde (untersucht bis 1885 Gauss) größer wird (vgl. Fig. 7). Bei einem Felde von 350 Gauss war ein Einfluß fast unmerkbar.

§ 31. Um zu sehen, ob bei $l = 0,960$ auch in stärkeren Feldern nur Erniedrigung des Funkenpotentials vorhanden ist, wurden noch Versuche bei $\mathfrak{H} = 10890$ Gauss angestellt. Die Ergebnisse sind ebenfalls in Fig. 7 eingezeichnet. Jetzt ist aber eine Erhöhung des Potentials eingetreten und wieder ist das Minimum nach höheren p -Werten verschoben.

§ 32. In demselben starken Magnetfelde wurden auch einige Versuche bei der Funkenlänge $l = 2,979$ mm ausgeführt. Es wurde gefunden:

$$\begin{array}{ll} p = 23,40 \text{ mm Hg} & V = 1224 \text{ Volt} \\ p = 15,58 \text{ " } & V = 1110 \text{ " } \end{array}$$

Hieraus ergibt sich, daß auch bei den verhältnismäßig hohen Drucken, wo vorher der Effekt fast ganz verschwunden war, genügend hohe Felder Erhöhung des Potentials bedingen,

§ 33. Es wurde noch versucht, bei den zur Verfügung stehenden Mitteln eine obere Grenze des Druckes für den Magnetfeldeinfluß nachzuweisen. Die Hochspannungsbatterie wurde dazu auf 3400 Volt vergrößert. Für die Messung der Spannung, die den Meßbereich des Millivoltmeters V (Fig. 1)

überschritt, wurde ein nachgeprüftes Braunsches Elektrometer (Ablesegenaugigkeit ± 10 Volt) verwendet. Dies hatte zur Folge, daß der absolute Wert des Potentials weniger genau bestimmt werden konnte als die durch das Magnetfeld bewirkte Änderung, die am Millivoltmeter abzulesen war. Es wurde z. B. gefunden:

$$\begin{array}{lll} t = 18^{\circ}5 - 18^{\circ}6 & l = 4,926 \text{ mm} & p = 96,77 \text{ mm Hg.} \\ \mathfrak{H} & 0 & 10880 \\ V & 3149 & 3322 \\ A V & & 173 \text{ Volt} \end{array}$$

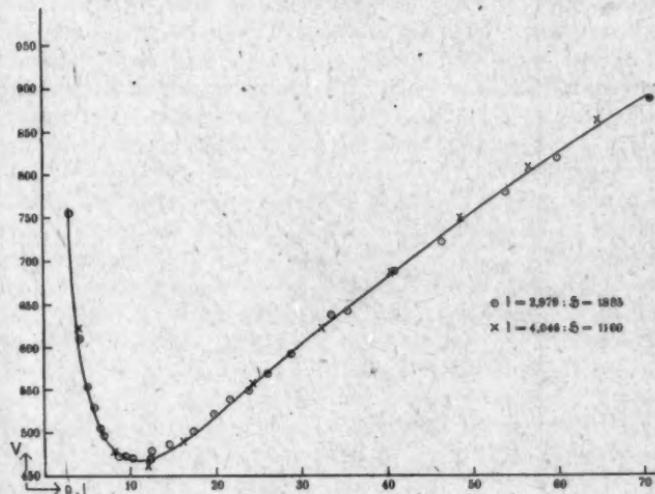


Fig. 9.

Also bei dem verhältnismäßig hohen Drucke von $p = 96,77$ mm Hg ist noch eine Potentialerhöhung von 173 Volt in einem Magnetfelde von 10880 Gauss zu bemerken.

§ 34. Man kann sich die Frage vorlegen, ob etwa auch im Magnetfelde eine ähnliche Beziehung wie das Paschen'sche Gesetz vorhanden ist. Dieses ist natürlich nur möglich für solche Magnetfelder, in denen die Minimumpotentiale denselben Wert besitzen. Zwei solche Kurven sind aber aufgenommen, nämlich für $l = 2,979$ und $\mathfrak{H} = 1885$ sowie für $l = 4,046$ und $\mathfrak{H} = 1160$; Minimumpotentiale etwa 469 bzw. 460 Volt. In Fig. 9 sind die gemessenen Potentiale als Funk-

tion des Produktes $p \cdot l$ eingezzeichnet, und zwar für die beiden Kurven mit verschiedener Markierung. Es ist ersichtlich, daß bei dieser Darstellung alle gemessenen Werte auf der gleichen Kurve liegen; es gilt also auch im Magnetfelde ein dem Paschenschen ähnliches Gesetz.

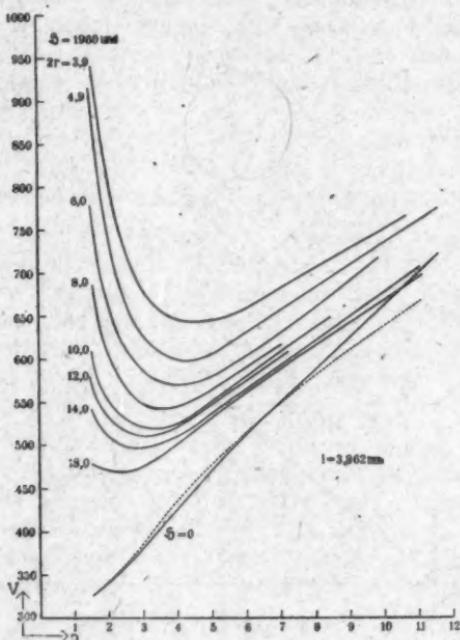


Fig. 10.

Abhängigkeit von dem Querschnitt der Funkenstrecke.

§ 35. Die beobachteten Effekte zeigen aber noch eine Komplikation, die sie leider der Durchrechnung nach der Townsendschen Theorie sehr schwer zugänglich machen: sie hängen nämlich noch von dem Querschnitte der Funkenstrecke ab. In Fig. 10 ist ein Teil einer Reihe von Messungen graphisch dargestellt, die unternommen wurden, um dieses Verhalten zu untersuchen (Temperaturbereich $10^{\circ}, 2 - 14^{\circ}, 8$).

Ausgegangen wurde von einer Funkenlänge $l = 3,873$ mm und einem Durchmesser der Ringbohrung von $2r = 3,90$ mm.

Nachdem eine Kurve aufgenommen war, wurde die Ringbohrung sukzessive erweitert und jedesmal wieder eine Meßreihe ausgeführt. Der beim Bohren des Ringes entstehende Grat wurde mit feinstem Schmirgelpapier entfernt, doch nahm hierdurch auch etwas die Dicke des Ringes ab, welche am Ende der Versuche zu $l = 3,852$ mm bestimmt wurde. An den Kurven der Fig. 10 sind die einzelnen Durchmesser angeschrieben.

Man ersieht aus der Figur die bekannte Tatsache, daß das Funkenpotential bei $\mathfrak{H} = 0$ unabhängig vom Querschnitt ist, wenigstens solange genügend homogenes elektrisches Feld vorhanden ist. Im Magnetfelde aber (1960 Gauss) ist die Erhöhung des Funkenpotentials sehr stark abhängig vom Querschnitt der Funkenstrecke, und zwar nimmt sie ab mit wachsendem Querschnitte. Wird der innere Durchmesser des Ringes ca. $2r = 12-14$ mm, so scheint das Feld zwischen den Elektroden nicht mehr genügend homogen zu sein; denn jetzt fangen auch die Funkenpotentiale ohne Magnetfeld an, sich zu verschieben. In Fig. 10 sind für $\mathfrak{H} = 0$ und $2r = 18,0$ mm die Messungen durch die punktierte Kurve dargestellt. Für $\mathfrak{H} = 0$ und $2r < 12$ mm fallen alle Potentiale auf dieselbe Kurve. Derartige Versuche wurden auch mit demselben Resultate ausgeführt bei $l = 1,960$ mm, $\mathfrak{H} = 1960$ Gauss und $2r = 8,1-14,0$ mm. Die Versuche zeigen, daß die Funkenpotentialerhöhung in dem beobachteten Bereiche sich nicht, mit wachsendem r bei konstantem l , p und \mathfrak{H} asymptotisch einem Grenzwerte nähert.

§ 36. Man könnte auf den Gedanken kommen, daß die beschriebene Abhängigkeit der Funkenpotentialerhöhung von dem Querschnitte der Funkenstrecke darauf zurückzuführen sei, daß die Elektronen durch das Magnetfeld an die innere Wandung der Ringe geworfen werden und dort vermöge ihrer Ladung das elektrische Feld ändern. Um diese Hypothese zu untersuchen, wurden die Hartgummiringe innen mit Graphit bestrichen, um ihnen eine geringe Leitfähigkeit zu erteilen. Besser gingen die Versuche mit einem Ring, der aus Schiefer hergestellt war. Nachdem dieser im Vakuum mit P_2O_5 ca. 80 Stunden gestanden hatte, war seine Leitfähigkeit, wahrscheinlich durch Austrocknen, so heruntergegangen, daß Messungen damit ausgeführt werden konnten. Allerdings

war die Leitfähigkeit immer noch so groß, daß die Blockkapazität nicht zu verwerten war. Es wurde daher mit dem Kurzschlußbügel gearbeitet.

Qualitativ erhielt man ganz dieselben Resultate wie mit den Hartgummiringen, z. B. in vergleichbaren Messungen statt einer Potentialerhöhung von 154 Volt jetzt 182 Volt, oder bei einem anderen Drucke an Stelle von 186 Volt jetzt 150 Volt. Auch die Änderungen mit dem Querschnitt der Funkenstrecke ergaben sich der Größe nach nahe gleich. Aber die absoluten Beträge der Potentiale waren bei dem Schieferring nicht unbeträchtlich höher als bei den Hartgummiringen, was wahrscheinlich auf die in dem Schieber enthaltene Feuchtigkeit und vielleicht auch vorhandene Kohlenwasserstoffe (Petroleum) zurückgeführt werden kann, da, wie oben ausführlich gezeigt, das Funkenpotential gegen Verunreinigungen recht empfindlich ist. Kontrollversuche lehrten übrigens, daß der Leistungsstrom selbst in dem Schieferring durch das Magnetfeld nicht beeinflußt wurde. Jedenfalls ist aus diesen Versuchen ganz sicher zu folgern, daß die Hypothese der Wandladungen fallen lassen muß, hieraus ist die Abhängigkeit vom Querschnitt nicht zu erklären.

Zur Theorie des Magnetfeldeinflusses.

§ 37. Für die Deutung der gewonnenen Resultate kommt in erster Linie Townsends Theorie des Funkenpotentials¹⁾ in Betracht, eine Theorie, die sich bisher immer quantitativ ganz gut für Luft bewährt hat.

Nennt man α die Anzahl Elektronen, welche durch Stoßionisation pro 1 cm Weglänge im elektrischen Felde X von einem Elektron neu gebildet werden, bezeichnet β die analoge Zahl für die positiven Ionen, so tritt nach Townsend bei einer solchen Elektrodendistanz l ein Funken ein, wenn gilt:

$$(1) \quad p \cdot l = \frac{\log \left(\frac{\alpha}{p} \cdot \frac{p}{\beta} \right)}{\left(\frac{\alpha}{p} - \frac{\beta}{p} \right) \log e}.$$

1) J. S. Townsend, Phil. Mag. (6) 6. p. 598. 1903; Zusammenfassungen siehe: J. S. Townsend, The Theory of Ionization of Gases by Collision, London bei Constable u. Co. 1910, sowie von demselben: Electricity in Gases, Oxford, Clarendon Press 1915.

Hierbei ist e die Basis der natürlichen Logarithmen, p der Druck des Gases; das elektrische Feld ist als homogen vorausgesetzt. Aus den Arbeiten von Townsend und seinen Schülern sind zusammengehörige Werte von X/p , α/p und β/p für verschiedene Gase zu entnehmen. Das Funkenpotential V bei dem Werte $p \cdot l$ ergibt sich dann zu:

$$(2) \quad V = p \cdot l \cdot \frac{X}{p}.$$

§ 38. Überlagert man nun dem elektrischen Felde ein transversales magnetisches Feld von der Stärke \mathfrak{H} , so wird das augenscheinlich zur Folge haben, daß sich die Elektronen nun nicht mehr längs der elektrischen Kraftlinien bewegen. Ist die Anfangsgeschwindigkeit der durch Stoß neu gebildeten Elektronen Null oder zu vernachlässigen, ist ferner der Zusammenstoß zwischen den Elektronen und den Gasmolekülen immer vollkommen unelastisch, so werden alle Elektronen im Gase während ihrer freien Weglängen gewöhnliche Zykloiden¹⁾ beschreiben. Dabei ist der Radius des die Zykloiden erzeugenden Kreises gegeben durch²⁾:

$$(3) \quad r = \frac{X}{\frac{e}{m} \mathfrak{H}^2}.$$

Da nun der absolute Betrag der freien Weglänge der Elektronen nicht dadurch geändert werden sollte, ob die Elektronen sich geradlinig oder auf Zykloiden bewegen, so wird die Folge sein, daß in dem Magnetfelde die Elektronen bis zu einem Zusammenstoß mit einem neutralen Gasmolekül einen *kleineren Weg in Richtung des elektrischen Feldes* zurückgelegt haben, als wenn das Magnetfeld nicht vorhanden ist. Daraus folgt aber erstens, daß im Magnetfelde die Anzahl der Zusammenstöße eines Elektrons pro 1 cm Weglänge in Richtung des elektrischen Feldes vergrößert wird, sowie zweitens, daß die bis zu einem Zusammenstoß gewonnene kinetische Energie kleiner wird. Hieraus erkennt man, daß für den *Elektronenstoß* das transversale Magnetfeld so wirken sollte wie eine Druckerhöhung des Gases.

Für den Stoß der positiven Ionen liegen aber die Ver-

1) E. Riecke, Ann. d. Phys. 4. p. 386. 1901.

2) Z. B. J. J. Thomson, Elektrizitätsdurchgang p. 88.

hältnisse anders. Denn wegen der sehr viel größeren Masse der positiven Ionen wird auf diese das Magnetfeld nur wenig Einfluß ausüben, ihre ionisierende Wirkung sollte nicht wesentlich geändert sein.

Man darf nicht etwa denken, daß nach der Theorie die Kurven im Magnetfeld durch Verschiebung der Kurven für $\mathfrak{H} = 0$ nach höheren p zu erhalten wären, so daß z. B. auch das Minimumpotential im Magnetfelde dasselbe wäre wie ohne Magnetfeld. Wenn in Gleichung (1) für gegebenes X/p das β/p ungeändert bleibt, α/p aber kleiner wird, so ergeben sich für gleiche $p \cdot l$ *größere* Funkenpotentiale V . Insoweit lassen sich also die Resultate nach Townsend qualitativ deuten.

§ 39. Aber auf diese Weise wird die beobachtete Erniedrigung des Funkenpotentials im Magnetfelde bei $l = 0,960$ nicht erklärt. Denn hierzu müßten bei denselben X/p die α/p größere Werte annehmen. Nun hat zwar Townsend (vgl. oben § 3) im Anschluß an die Arbeit von Strutt gemeint, daß α/p bei den dort vorhandenen tiefen Drucken im Magnetfelde wächst¹⁾, aber dieses ist für den Fall ausgeführt, daß die freie Weglänge der Elektronen größer ist als der Elektrodenabstand. Derartige Verhältnisse liegen aber bei den hier beschriebenen Versuchen nicht vor; denn da bei den Minimumpotentialen der Wert $p \cdot l$ konstant = 5,67 ist, so bleibt das Verhältnis der mittleren freien Weglänge der Elektronen zum Elektrodenabstand beim Minimumpotential dasselbe bei den verschiedenen Elektrodendistanzen. Zu beachten wäre allerdings, daß bei größerem l im Minimum die elektrische Feldkraft kleiner ist, aber da die durch das elektrische Feld erzeugte Elektronengeschwindigkeit in jedem Falle groß ist gegenüber der thermischen Geschwindigkeit der Gasmoleküle, so wird hierdurch die freie Weglänge der Elektronen nicht wesentlich geändert sein.

§ 40. Auch die Abhängigkeit der Funkenpotentialerhöhung im Magnetfelde vom Querschnitt der Funkenstrecke ist in der reinen Theorie von Townsend nicht enthalten. Damit

1) Dabei ist wieder unter α die auf 1 cm *in Richtung des elektrischen Feldes* erfolgende Anzahl ionisierender Zusammenstöße verstanden. Bewegt sich das Elektron 1 cm in Richtung des elektrischen Feldes, so ist die wirklich zurückgelegte Wegstrecke viel größer.

steht wohl in Zusammenhang, daß eine Berechnung der α im Magnetfelde auf Grund der Zykloidenbewegungen der Elektronen ebenfalls nicht zum Ziele führte.

§ 41. Der Grund, warum die sonst gut bewährte Townsendsche Theorie auf die Magnetfeldeffekte angewendet, versagt, mag vielleicht in folgendem gefunden werden. Durch das Magnetfeld werden bei den verwendeten Funkenstrecken ein großer Teil der Elektronen an die Wandung der Ringe geworfen und kommt nun nicht mehr für weitere Stoßionisation in Betracht. Verwendet man offene Funkenstrecken, so tritt dasselbe insofern ein, als die Elektronen aus dem Bereich des stärksten elektrischen Feldes seitlich durch das Magnetfeld herausgedrängt werden. Ein derartiger Effekt würde aber offenbar analog wie eine Verkleinerung der α wirken und ebenfalls das Funkenpotential erhöhen.

Wird der Querschnitt der Elektroden größer bei konstant gehaltener Distanz, so ist in demselben Magnetfelde die Funkenpotentialerhöhung kleiner (§ 35). Mit anderen Worten: Die im Magnetfelde durch den Querschnittseinfluß hervorgebrachte Potentialerhöhung nimmt ab mit wachsendem Verhältnis m von Durchmesser zu Abstand der Elektroden. Bei den Messungen der Fig. 10 ($H = 1960$ Gauss) wächst m bis 4,7, bei ähnlichen Beobachtungen ($l = 1,962$ mm, $2r = 14,0$ mm, $H = 1960$ Gauss) war bei $m = 7,1$ und $p = 1,93$ mm Hg noch eine Potentialerhöhung von 25 Volt zu konstatieren. Da bei den Versuchen der Fig. 7 H nahe dasselbe (1885 Gauss), aber $m = 8,4$ war, so wäre es möglich, daß nur hier der Magnetfeldeffekt unbeeinflußt durch die Querschnittsabhängigkeit vorliegt.

Es scheint mir auch vorläufig nicht angängig, die Versuche von Greinacher¹⁾ über die Stoßionisierung im Magnetfelde zur Erklärung heranzuziehen, da bei diesen einerseits nicht für homogenes elektrisches Feld gesorgt war, andererseits aber auf den Einfluß des Querschnittes, der bei diesen Versuchen sicherlich auch eine Rolle spielen muß, nicht geachtet wurde.

§ 42. Es sind weitere Versuche in Vorbereitung, die darauf hinzielen, den Querschnittseinfluß zu eliminieren. Erst nach Abschluß derselben wird es möglich sein, den Magnetc-

1) H. Greinacher, Verh. d. D. Physik. Ges. 17. p. 131. 1915.

332 E. Meyer. Über die Beeinflussung des Funkenpotentials usw.

feld einfluß vollständig nach der Theorie von Townsend zu diskutieren.

Die vorliegende Untersuchung habe ich noch in Tübingen ausgeführt. Es ist mir ein Bedürfnis, Hrn. Paschen für die außerordentliche Bereitwilligkeit bestens zu danken, mit der er mir die großen Hilfsmittel seines Instituts zur Verfügung stellte.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 26. September 1918.)

2. Zur Kenntnis des Neonspektrums;
von K. W. Meissner.

§ 1. Theoretische Studien von H. E. Watson¹⁾ über den Bau des *Neonspektrums* zeigten, daß fast alle stärkeren Linien des Neonspektrums sich in Triplette und Quadruplette konstanter Schwingungsdifferenzen ordnen lassen.

Unter Verwendung genauer interferometrischer Messungen²⁾ konnte ferner gezeigt werden³⁾, daß die Wellenzahlendifferenzen der im Rot liegenden Triplette und Quadruplette eine große Konstanz aufweisen. Die Auffindung eines neuen Quadrupletts am roten Ende des Spektrums machte außerdem wahrscheinlich, daß bei 8082,45 Å.-E. noch eine stärkere Linie liegen müßte. Zum Nachweise der Lückenlosigkeit der Triplette und Quadruplette war es nötig, den experimentellen Nachweis für die Existenz dieser Linie zu erbringen.

In Verfolgung dieses Zieles zeigte es sich, daß das Neon-Spektrum im Gebiete von 7900—9000 Å.-E. noch eine ganze Reihe stärkerer und schwacher Linien besitzt.⁴⁾ Die Kenntnis ihrer genauen Wellenlängen ist für serientheoretische Studien von großer Wichtigkeit. Zu ihrer Ermittlung wurde diese Arbeit unternommen.

§ 2. Für die *Photographie* der roten und ultraroten Linien wurden mit *Dicyanin A* sensibilisierte Platten verwendet. Dabei wurde genau nach dem schon früher⁵⁾ ausführlich beschriebenen Verfahren gearbeitet. Um jedoch möglichst klare Aufnahmen zu erhalten, wurden die in der Farbstofflösung gebadeten Platten fast immer noch in einem Alkohol-Wasser-Gemisch abgespült und erst dann rasch im Ventilatorstrome

1) H. E. Watson, Proc. Cambr. Phil. Soc. **16**, p. 130. 1912.

2) K. W. Meissner, Ann. d. Phys. **51**, p. 115. 1916.

3) K. W. Meissner, Physik. Zeitschr. **17**, p. 549. 1916.

4) K. W. Meissner, Archives des Sciences Physiques et Naturelles

44. p. 475. 1917.

5) K. W. Meissner, Ann. d. Phys. **50**, p. 716. 1916.

getrocknet. Man verwendete für die Sensibilisation Schleussner Moment, Eisenberger Extrarapid und Eisenberger Röntgenplatten. Besonders die beiden letzten Sorten ergaben gute Resultate. Für Messungen im sichtbaren Gebiete dienten „Panchromatic“-Platten von Wratten & Wainright oder es wurde mit Pinacyanol; Pinachromblau oder Pinacyanolblau sensibilisiert.

§ 3. Programm der Arbeit. Zur genauen Ermittlung der Wellenlängen der neuen Linien wurde die interferometrische Methode nach Fabry und Perot¹⁾ angewendet, die zwar mühsamer ist als die Messung mit einem großen Rowlandschen Gitter, aber mit verhältnismäßig wenig Mitteln große Genauigkeit erreichen läßt. Die Wahl dieser Methode zeichnet den Gang der Arbeit vor: 1. Mit Hilfe bekannter Normalen (Eisen, Argon) werden die stärkeren Linien mit einer Genauigkeit von ca. $1/10$ Å.-E. ermittelt. 2. Mit Hilfe dieser rohen Wellenlängenwerte erlaubt die interferometrische Methode die genaue Bestimmung dieser stärkeren Linien, die nun als Normalen dienen, um 3. die schwachen Linien mit einem Gitter (allerdings mit geringerer Genauigkeit) zu bestimmen.

§ 4. Zur Ausführung der Gittermessungen diente zu Anfang der Arbeit ein kleines Rowlandsches Plangitter, das mit einem Fernrohrobjektiv von 750 mm Brennweite in Autokollimationsmanier montiert war und die Messung der Linien bis auf 0,1 Å.-E. gestattete.

Später konnte noch ein Rowlandsches Konkavgitter von 1 m Krümmungsradius beschafft werden, mit dem alle endgültigen Gittermessungen ausgeführt wurden. Die Aufstellung war nur provisorisch auf einer hölzernen Grundplatte mit festem Rowlandschen Kreis; der Spalt war so angebracht, daß die Normalenrichtung in die Spektralgegend 5800" fiel. Die Kamera war auch aus Holz gefertigt und so groß, daß man von $\lambda = 2000$ Å.-E. erster Ordnung bis $\lambda = 8600$ zweiter Ordnung photographieren konnte. Trotz der provisorischen Aufstellung konnte die Justierung sehr exakt durchgeführt werden, und man konnte Aufnahmen von beträchtlicher Dauer machen, ohne Verschiebungen befürchten zu

1) Ch. Fabry u. A. Perot, Ann. de chim et phys. (7) 12, p. 459 bis 501. 1897.

müssen. Die ganze Anordnung war mit Draht überspannt und mit dichtem, schwarzem Tuche gegen Licht geschützt.

Für die erste Bestimmung der stärkeren Neonlinien lieferten die Normalen das rote Argonspektrum oder auch das Eisen-Spektrum (zweiter Ordnung). Dabei wurde, um etwaige Verschiebungen während der Aufnahme wahrnehmen zu können, mit aller Vorsicht verfahren und die Exposition der Normalen in drei Abschnitten vollzogen: zu Anfang, in der Mitte und zu Ende der Aufnahme.

Bei der Exposition von Neon wurde ein Rotfilter (Wratten *F* oder *a*) eingeschaltet, um Linien zweiter Ordnung auszuschließen; das gleiche geschah, wenn Argon die Normalen im Rot lieferte.

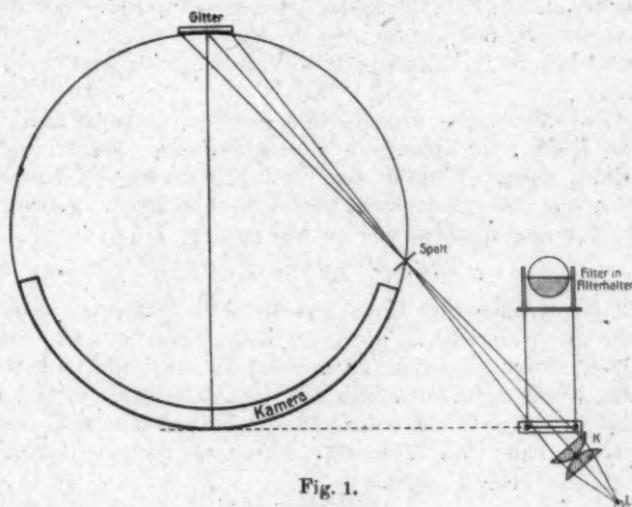


Fig. 1.

Falls der Eisenbogen verwendet wurde, diente noch ein Äskulinfilter zur Beseitigung der Linien dritter Ordnung. Um auf den Aufnahmen die Eisenlinien immer von den Neonlinien unterscheiden zu können, wurden sie durch folgende Vorrichtung kenntlich gemacht. Während der Exposition des Eisenspektrums würde an die Stelle der horizontalen Brennlinie des Konkavgitters ein horizontaler Draht oder ein breiter horizontaler Spalt gebracht, der im Spektrum so gut als

möglich abgebildet wurde (Fig. 1). Damit erreichte man, daß die Eisenlinien in der Mitte scharf unterbrochen wurden, während die Neonlinien in ihrer ganzen Ausdehnung abgebildet wurden. Bei Verwendung des horizontalen breiten Spaltes waren die Eisenlinien kürzer als die Neonlinien.¹⁾

Die einzelnen Platten hatten eine Größe $4,5 \times 6$ cm, so daß also bei einer Dispersion von $17 \text{ Å}\cdot\text{E}/\text{mm}$ ein Gebie von ca. $900 \text{ Å}\cdot\text{E}$. auf einer Platte meßbar war.

Die Aufnahmen wurden mit einem Zeisschen Komparator (mit Nickelstahlmaßstab) gemessen. Bei der Berechnung wurde bei genügend vorhandenen Normalen in der üblichen Weise verfahren: zwischen zwei Normalen werden die übrigen Wellenlängen linear interpoliert; die außerdem bekannten Normalen dienen zur Konstruktion einer Korrektionskurve, aus der die Abweichung von der „Normalität“ des Spektrums für jede einzelne Wellenlänge abgelesen werden kann.

Da insbesondere im äußersten Rot die Normalen nicht so dicht liegen, daß man die Korrektionskurve genau genug zeichnen kann, so wurde der Versuch gemacht, die Korrekturen aus einer Korrektionsformel zu berechnen. Es zeigte sich, daß eine quadratische Formel von der Form

$$\delta = a(\lambda_1 - \lambda_x) - b(\lambda_1 - \lambda_x)^2$$

vollkommen ausreicht. Hierin bedeutet δ die Differenz zwischen linear interpoliertem λ_x und dem korrigierten λ_x . Die Konstanten a und b berechnen sich dann aus zwei weiteren Normalen λ_2 und λ_3 und den dazu gehörigen Differenzen δ_2 und δ_3 . Selbst in einem Gebiete, das von der Normalen ziemlich weit abliegt, erhält man noch gute Resultate, wie die folgende Tabelle und Fig. 2 zeigen.

Im allgemeinen wird man dieses Verfahren ja wohl nur als Behelf gebrauchen; aber da gerade bei Messungen im äußersten Rot die Normalen oft sehr dünn gesät sind, wird man manchmal zu diesem Mittel greifen.

Bei den Messungen gegen Eisen wurde die Interpolation übrigens immer graphisch ausgeführt.

1) Vgl. die Anordnung mit Vergleichsprisma bei Sirks, Astronomy and Astrophysics **18**, p. 763. 1894, und Wadsworth, Astroph. Journ. **2**, p. 370. 1895.

Inten- sität	Kom- parator	λ linear Interp.	λ . I. Å.-E.	δ	$\delta_{\text{ber.}}$
6	37,1790	6217,279	6217,279	$\pm 0,000$	$\pm 0,000^*$
6	40,1916	6266,288	6266,495	$+ 0,207$	$+ 0,246$
6	42,5374	6304,449	6304,789	$+ 0,345$	$+ 0,339$
8	44,3525	6333,977	6334,428	$+ 0,451$	$+ 0,428$
10	48,5138	6401,673	6402,246	$+ 0,573$	$+ 0,557$
8	54,9233	6505,942	6506,527	$+ 0,585$	$+ 0,585^*$
7	56,5450	6532,324	6532,881	$+ 0,557$	$+ 0,557$
8	60,6152	6598,538	6598,953	$+ 0,415$	$+ 0,430$
8	65,5074	6678,124	6678,275	$+ 0,151$	$+ 0,165$
8	67,8997	6717,042	6717,042	$\pm 0,000$	$\pm 0,000^*$

1 mm = 16,2680 Å.-E.

Interpolationsformel:

$$\delta = 0,4792 \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{100} \right) - 0,09602 \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{100} \right)^2$$

$$\lambda_1 = 6217,279, \quad \lambda_2 = 6506,527, \quad \lambda_3 = 6717,042.$$

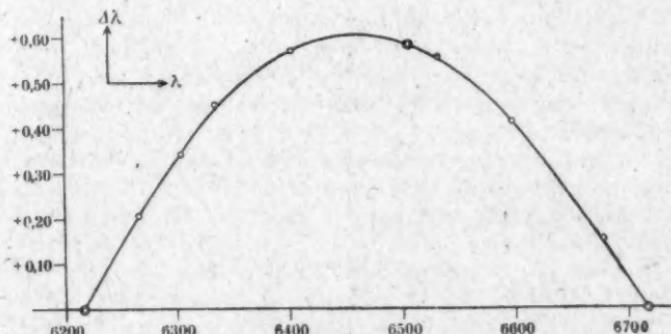


Fig. 2.

Bei der Bestimmung der schwachen Neonlinien gegen die starken Neonnormale (Nr. 3 des Programms), war es wünschenswert, ohne Filter arbeiten zu können, um so jeden unnötigen Lichtverlust zu vermeiden. Verwendet man aber kein Filter, so können die Linien zweiter und dritter Ordnung stören. Diese Störung umgeht die Anordnung, die in Fig. 1 skizziert ist. In der äußeren Brennebene des Konkavgitters wurde das Rotfilter so angebracht, daß nur die Hälfte des vom Kondensor K kommenden Lichtkegels durch das Filter

ging. Dadurch zerlegte man das Spektrogramm auf einfachste Weise in zwei Hälften: die eine zeigte nur die roten Linien, die andere die roten und die der zweiten und dritten Ordnung.

Für die *Berechnungen* stand eine *Rechenmaschine* (achtstellig) nach Thomas von Bunzel in Wien zur Verfügung.

Die *Belichtungsdauer* betrug für die starken Linien bis 8600 Å.-E. 30—45 Minuten; um auch die ganz schwachen Linien und die Linien bis 9000 Å.-E. gut zu erhalten, mußte man bis zu 3 Stunden exponieren.

Um die Linien bis 8800 Å.-E. auch in zweiter Ordnung zu erhalten, was zur Messung naher Doppellinien nötig war, waren allerdings Expositionzeiten von 10—12 Stunden erforderlich. Aber auch diese Aufnahmen waren trotz der improvisierten Aufstellung absolut scharf.

Bei so langer Belichtungsdauer gelang es sogar, in erster Ordnung bis zur Wellenlänge 9600 Å.-E. vorzudringen.

Die verwendeten *Neon- und Argonröhren* stammen von Robert Götze, Leipzig, und waren ziemlich rein; nur einige Heliumlinien waren schwach zu sehen. Die Röhren wurden mit transformiertem städtischen Wechselstrom gespeist und gingen dauernd gut, fast ohne Zerstäubung der Aluminiumelektroden.

Der Eisenbogen wurde von einer Akkumulatorenbatterie von 100 Volt mit 4 Amp. gespeist.

§ 5. *Die interferometrischen Messungen.*

Die Art der *interferometrischen Messungen* und Rechnungen war im wesentlichen die gleiche, die Verfasser schon bei der Messung der roten und ultraroten Neon- und Argonlinien angewendet hat¹⁾, und es soll genügen, auf diese Abhandlung hinzuweisen.

Einige Abänderungen mußten in der vorliegenden Arbeit jedoch getroffen werden, wie aus der Anordnungsskizze Fig. 3 erhellt.

Mit Hilfe des Objektives O_1 wird die Lichtquelle L_1 (Neonröhre „end on“) auf die Blende B_1 abgebildet. Das Objektiv O_2 entwirft von diesem Diaphragma auf Blende B_2 , die sich unmittelbar vor dem Perot-Fabryschen Etalon E' befindet, ein vergrößertes Bild. Das durch das Etalon entstehende

1) K. W. Meissner, I. c.

Interferenzringssystem wird mit Hilfe des Planspiegels P und des Hohlspiegels H (Brennweite 248 mm) auf dem Spalt S des Spektrographenkollimators abgebildet.

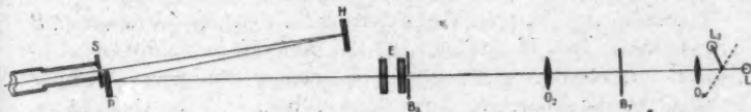


Fig. 8.

Der Unterschied gegen die frühere Anordnung besteht also lediglich darin, daß auf das Etalon E kein paralleles Strahlenbündel fällt, sondern ein konvergentes, das seinen Konvergenzpunkt im Etalon E besitzt. Zu dieser Anordnung war man in dieser Arbeit gezwungen, da die in Betracht kommenden neuen Neonlinien nur stark bei Kapillare „end-on“ auftreten und man sozusagen eine punktförmige Lichtquelle hatte. O_1 und O_2 waren Achromate, P und H Spiegel aus Glas von Schmidt & Haensch, Berlin, die nach dem Martinschen Verfahren dick versilbert und poliert waren.

Als dispergierender Apparat diente ein kleines Spektroskop von Schmidt & Haensch, das in der Werkstatt des Institutes mit einer Kamera ausgestattet wurde. Die Objektive hatten eine Brennweite von 280 mm und eine nutzbare Öffnung von 24 mm. Das Prisma war ein stark dispergierendes Rutherfordprisma. Da es wegen der Kriegsverhältnisse schwer war, einen größeren Spektrographen zu erhalten, so mußte man die kleine Dispersion dieses Spektrographen in Kauf nehmen, obgleich dadurch die Messung außerordentlich erschwert war. Die Kassette der Kamera war, wie üblich, zum Verschieben eingerichtet und faßte drei Aufnahmen.

Die Brennweite des Hohlspiegels wurde nach den üblichen Methoden bestimmt, durch Messung von Bildweite und Vergrößerung. Die Bestimmung erfolgte okular und photographisch.

Viel schwieriger als diese Bestimmung ist die exakte Einstellung des Kollimatorspaltes in die Brennebene des Hohlspiegels. Doch konnte dies mit einer Genauigkeit von 0,1 mm auf folgende Art bewerkstelligt werden: Auf dem Spalt des Spektrographen befand sich ein Messingrahmen, der mit drei exakt parallelen, dünnen Quarzfäden bespannt war, die ge-

nau senkrecht zur Spaltrichtung verliefen. (Der Rahmen war durch Schräubchen zur genauen Einstellung der Fäden justierbar.)

An die Stelle des Spektrums wurde nun eine kleine elektrische Glühbirne gebracht und ein auf Unendlich eingestelltes Fernrohr mit starker Vergrößerung in den Strahlengang *EP* gebracht. Der Hohlspiegel *H*, der auf einem Schlitten montiert und mittels einer Schraube messbar exakt verschiebbar war, wurde sodann so lange verschoben, bis die Quarzfäden auf dem Kollimatorspalt ganz scharf waren. Die verschiedenen Einstellungen wichen nur ganz wenig voneinander ab (ca. 0,1 mm).

Die Verwendung dieser dünnen Quarzfäden für exakte Justierungen erwies sich vielfach, auch bei Justierung von Spektrographen, als ausgezeichnet. Die Schärfe der feinen Brennlinie lässt sich eben viel besser beurteilen als die opaker Fäden gleicher Dicke. (Mit Hilfe solcher auf einen kleinen Rahmen gespannter Quarzfäden wurde auch die Justierung des Rowlandschen Konkavgitters vollzogen; eine photographische Nachjustierung erwies sich als unnötig.)

Diese Einstellungen, wie auch die des Fernrohres auf Unendlich (mit Autokollimation), wurde mit einfarbigem Lichte, meist dunklem Rot, ausgeführt.

Die Konstanz der Einstellung wurde oft geprüft und bei jeder Aufnahme die Entfernung Spalt—Hohlspiegel mit einer Schublehre kontrolliert.

Der *Hauptbestandteil* der Apparatur war das *Etalon nach Fabry und Perot*. Die exakt gearbeiteten Platten (kreisförmig, 25 mm Durchmesser) stammten von Adam Hilger, London, und wurden mittels Kathodenerstäubung halbdurchsichtig versilbert. Das Gehäuse und die Distanzstücke waren in der Werkstatt des Institutes angefertigt. Die Grundform der Gehäuse war die der Hilgerschen. Die Ausführung selbst musste etwas geändert werden, da ein Gehäuse zur Aufnahme mehrerer Distanzringe dienen sollte (3, 5, 6, 8, 10, 15, 20, 25 und 50 mm). Das Grundgehäuse war passend für Messungen mit Distanzstück von 10 mm; verwendete man die kleineren Ringe, so wurde die Tiefe der Bohrung durch Einsatzringe entsprechend verkleinert. Für größere Ringe konnte der hintere Teil des Gehäuses abgeschraubt und durch einen entsprechend längeren Tubus ersetzt werden.

Die einzelnen Distanzstücke sollten ganz aus Nickelstahl gefertigt werden; da aber wegen des Krieges dieses Material nicht in den gewünschten Maßen beschafft werden konnte, mußte man sich in der Weise behelfen, daß ein Messinghohlyylinder drei Säulchen aus Nickelstahl fassen mußte, die nur sehr wenig über die Grundflächen des Messingringes hervorschauten. Die Invarstäbchen waren ziemlich fest in den Messingring eingetrieben und wurden auf der Drehbank planparallel abgedreht und dann von Hand planparallel geschliffen und poliert.

Die so hergestellten Distanzringe sind allerdings nur ein Ersatz, und es zeigte sich im Verlaufe der Arbeit, daß sie nicht konstant planparallel bleiben, sich vielmehr in einiger Zeit oft um ein bis zwei Tausendstel Millimeter ändern, was ja an sich zu verwundern ist, wenn man die verschiedenen thermischen Eigenschaften von Messing und Invar bedenkt. Es blieb jedoch nichts anderes übrig, als die verwendeten Ringe öfters zu prüfen und neu zu schleifen und zu polieren. Während der Aufnahmen selbst war übrigens die Konstanz der Distanzstücke eine gute, wenn auch ganz kleine Veränderungen nicht immer vermieden werden konnten, da manche Aufnahmen eine Expositionsdauer von mehreren Stunden erforderten.

Von vornherein lag die Absicht fern, die neuen Neonlinien als wirkliche „Normalen zweiter Ordnung“ (im unmittelbaren Anschluß an Cd 6438) zu bestimmen; vielmehr war die Absicht die, die Linien mit einer solchen Genauigkeit zu bestimmen, die für serientheoretische Studien erwünscht ist. Für die Spektralgegend im äußersten Rot wäre die gewünschte Genauigkeit ca. 0,01 Å.-E. Trotzdem wurde die Genauigkeit, sofern es möglich war, weiter getrieben. (Vgl. § 7.)

Da also von Anfang an nicht die größte Exaktheit angestrebt wurde, so war es auch nicht nötig, die neuen Linien an die Cadmiumlinie 6438 direkt anzuschließen, sondern es genügte, als intermediäre Normale irgendeine der früher bestimmten Neonnormale zu verwenden. Dabei stieß man jedoch auf Schwierigkeiten, da fast alle diese Linien bei Verwendung der Neonröhre in gerader Durchsicht breite Selbstumkehr zeigen oder doch sehr breit erscheinen (etwa dreimal so breit wie bei senkrechter Kapillare).

Aus zwei Gründen nun wurde die grüne Neonlinie 5400 als Hilfsnormale gewählt: erstens ist diese Linie auch bei „Röhre end on“ absolut scharf und ohne eine Spur von Selbstumkehr oder Verbreiterung, und zweitens ist die Empfindlichkeit der benutzten Dicyaninplatten für 5400 ungefähr dieselbe wie für 8500 Å.-E., so daß in bequemster Weise Normale und unbekannte Linien gleich lange exponiert werden konnten. Dies ist ein nicht zu unterschätzender Vorteil; denn kleine Änderungen in der Apparatur betreffen so also die Normale und die zu messenden Linien gleich stark, und es können so diese Fehlerquellen leicht vermieden werden.

Die genaue Wellenlänge dieser Hilfsnormale wurde nun direkt an die rote Cadmiumlinie 6438,4696 Å.-E. angeschlossen.

Zur Reproduktion dieser Linie wurde eine aus Quarz geblasene Lampe verwendet, die mit reinem Cadmium gefüllt wurde und deren Elektroden mit weißem Siegellaek eingekittet waren. Während des Betriebes wurde dauernd mit einer Gädelschen Quecksilberpumpe gepumpt und die Lampe mit kaltem Wasser gekühlt. Eine Spur Quecksilberzusatz zu der Cadmiumfüllung genügte, um die Hauptquecksilberlinien stark und scharf zu erhalten, was für die später ausgeführten Kontrollmessungen von Wichtigkeit war.

Die Cadmiumlampe brannte bei einer Belastung von 3 Amp. beliebig lange, sofern durch genügend langes Pumpen dafür gesorgt wurde, daß die im Rot und Violett auftretenden Banden verschwanden. Bei Anwesenheit dieser Banden erscheinen übrigens die Cadmium- und Quecksilberlinien sehr unscharf, weshalb die Aufnahmen auch nur dann gemacht wurden, wenn diese störenden Banden vollständig verschwunden waren und die Linien sich scharf vom schwarzen Grunde abhoben.

Die Stellung der Cadmiumlampe ist in Fig. 3 mit L_2 bezeichnet. Mit Hilfe eines gewöhnlichen Spiegels S konnte sie auf der Blende abgebildet werden. Der Spiegel S war zum Wegklappen eingerichtet, so daß abwechselungsweise Cadmium- und Neonspektrum exponiert wurde. Für 6438 mußte S Minuten, für 5400 5—10 Minuten exponiert werden.

Die Aufnahmen wurden bei verschiedenen Distanzen gemacht, um auf diese Weise den Phasensprung zu eliminieren; der so erhaltene Wert der Phasenänderung (vgl. § 6) stimmte

gut mit dem Werte, der durch direkte Messung mit Hilfe der grünen Quecksilber- und Cadmiumlinie erhalten wurde. Der endgültige Wert der Wellenlänge, für den natürlich auch die Korrektion wegen der Dispersion der Luft durchgeführt wurde, und der den Messungen im Neonspektrum zugrunde gelegt wurde, beträgt

5400,5638 Å.-E.

Der Fehler, der diesem Werte anhaftet, dürfte unter 0,001 Å.-E. liegen. Diese Meinung wird auch durch folgende Rechnung bestätigt.

Die Linien 5400 und 5852 hängen mit den Triplets und Quadruplets zusammen, und es sollte danach die Wellenzahlendifferenzen zwischen 5400 und 5852 betragen 1429,428. Da nun die Vakuumschwingungsdifferenzen für 5400 und 5852 18511,447 und 17082,022 betragen, so berechnet sich $\Delta\nu$ zu 1429,425.

Da sich die grüne Neonlinie 5400 übrigens wegen ihrer leichten Reproduzierbarkeit sehr als Normale eignet und viel bequemer erzeugt werden kann als die Cadmiumlinie, ist eine noch exaktere Messung dieser Linie im Gange, die den Wert dieser Linie und einiger anderer bis auf wenige Zehntausendstel einer Ångströmeinheit liefern soll.

Die Messung der anderen Wellenlängen im Anschluß an diese Normale erfolgte auf Grund der bekannten Formel:

$$\lambda_x = \frac{n_s \cdot \lambda_s}{n_z} \sqrt{\frac{F^2 + v_s^2 R_s^2}{F^2 + v_z^2 R_z^2}},$$

in der λ_x die gesuchte Wellenlänge und n_z ihre Ordnungszahl, λ_s die grüne Neonlinie und n_s ihre Ordnungszahl bedeutet. F ist die Brennweite des Hohlspiegels, v_s und v_z die Vergrößerungsfaktoren des Spektralapparates, R_s und R_z sind die auf den Negativen gemessenen Radien der Interferenzringe von Standardlinie und unbekannter Linie.

Die Messung der Brennweite des Hohlspiegels wurde schon oben skizziert; als mittlerer Wert liegt den Messungen der Wert 248,0 mm zugrunde ($F^2 = 61\,500$). Die Bestimmung von v_s und v_z geschah durch Ausmessung der Quarzfäden auf dem Spalt und ihres Bildes in den Interferenzstreifen der Spektrogramme. Diese Messungen, wie die der Ringdurchmesser $2R_s$ und $2R_z$, geschah mit dem Zeiss'schen Komparator.

Da Kollimatorlinse und Kameraobjektiv des Spektralapparates die gleiche Brennweite hatten und beide sehr gut korrigiert waren, war die Vergrößerung bei guter Justierung sehr nahe gleich Eins und die Änderung mit der Wellenlänge nur minimal. Die Abweichungen der Werte bei verschiedenen Aufnahmen fiel in die Grenzen der Meßgenauigkeit. Aus diesem Grunde erschien es ohne weiteres erlaubt, für die äußersten ultraroten Linien den Vergrößerungsfaktor aus einer Aufnahme zu entnehmen, die ohne Interferenzapparat gewonnen wurde.

Es ist wohl nicht unnötig, auch an dieser Stelle auf eine Vorsichtsmaßregel aufmerksam zu machen, die bei den Rechnungen immer beobachtet wurde. Es wurden immer die Werte von R_s und R_x bei den Berechnungen von λ_x kombiniert, die möglichst gleich groß waren. Dadurch können Fehler des abbildenden Systems und nicht ganz exakte Einstellung des Hohlspiegels nicht in dem Maße die gewonnenen Resultate fälschen, wie es bei willkürlicher Kombination beliebiger R_s und R_x der Fall sein kann. Dies erhellt aus der allgemeinen Fehlerformel:

$$\Delta \lambda_x = \lambda_x \left\{ -\frac{d n_x}{n_x} + \frac{1}{F^2/v^2} \left(R_s d R_s - R_x d R_x + \frac{d F}{F} (R_x^2 - R_s^2) - \frac{d v}{v} (R_s^2 - R_x^2) \right) \right\}.$$

Falls man annimmt, daß die Fehler der Messung in R_s und R_x den gleichen Betrag annehmen, so folgt:

$$\Delta \lambda_x = \lambda_x \left\{ -\frac{d n_x}{n_x} + \frac{1}{F^2/v^2} \left((R_s - R_x) d R + \frac{d F}{F} (R_x^2 - R_s^2) - \frac{d v}{v} (R_s^2 - R_x^2) \right) \right\},$$

woraus man erkennt, daß der Fehler in λ_x um so kleiner wird, je näher man die Größen R_s und R_x wählt.

Ogleich nähere Untersuchungen zeigten, daß auch die Kombinationen verschiedener R_s und R_x innerhalb der Fehlergrenzen zu denselben Resultaten führten, wurde diese Vorsichtsmaßregel doch immer befolgt.

Ein ausgezeichnetes Kriterium für die gute Justierung der ganzen Apparatur bietet nach meinen Erfahrungen die Konstanz der Wellenlängenwerte, die man erhält, wenn man einen einzigen Ring der Standardlinie mit möglichst vielen Ringen einer zweiten Linie kombiniert. Auf diese Weise ver-

rät sich sofort eine falsche Einstellung des Hohlspiegels H oder ein falscher Brennweitenwert, der der Rechnung zugrunde liegt. Es zeigt sich in diesem Falle ein deutlicher Gang in den Wellenlängenwerten mit Zunahme des Ringdurchmessers der zweiten Linie, falls man den kleinsten Ring der Standardlinie zugrunde legt.

Fehler dieser Art treten auch auf, wenn man an Stelle des Hohlspiegels H und des Planspiegels P als abbildendes System eine einfache Linse nimmt. Obgleich eine solche Anordnung eine große Vereinfachung des Aufbaues mit sich bringt und auch eine größere Lichtstärke erzielt, ist deshalb doch die Anwendung von Spiegeln bei derartigen Messungen ratsam. Falls man natürlich innerhalb kleiner Spektralbereiche Messungen ausführt, gibt eine einfache Linse auch gute Resultate.

§ 6. Die Wellenlängenwerte, die auf die in § 5 kurz geschilderte Weise erhalten werden, sind noch nicht die endgültigen Werte, vielmehr bedürfen sie noch zweier Korrekctionen:

I. Eine teilweise nicht zu vernachlässigende Korrektion wegen der *Phasenänderung* durch Reflexion an dem Silber, die mit der Wellenlänge sich ändert, und

II. Korrektion für Temperatur und Druck wegen der *Dispersion der Luft*.

1. Die Ermittlung des Phasensprunges erfolgte genügend genau ($\pm 0,005$ Ordnungszahlen) durch Verwendung verschiedener Distanzstücke. Für die Messung wurden Aufnahmen bei 3, 6, 8 und 10 mm Distanz ausgeführt. Die Ermittlung des Phasensprunges geschah graphisch oder durch Rechnung nach dem einfachen, früher (I. c.) angegebenen Verfahren. Die für verschiedene Wellenlängen erhaltenen Werte wurden zu einer Kurve zusammengestellt und die endgültige Korrektion nach dieser vorgenommen. Der Phasensprungwert für die Linien oberhalb 8500 wurde aus dieser Kurve extrapoliert, da diese Linien nur auf Aufnahmen mit 3 mm Distanz erhalten werden konnten. Falls keine Anomalie des Phasensprunges in dieser Gegend auftritt, was wohl kaum anzunehmen ist, dürfte durch diese Extrapolation die Genauigkeit der Messung wenig beeinflußt werden. Daß die einzelnen Werte

sich zudem in nicht zu weiten Grenzen bewegen, ist aus der Kurve Fig. 4 zu ersehen. (Bezogen auf Cd 6488 als Normale.)

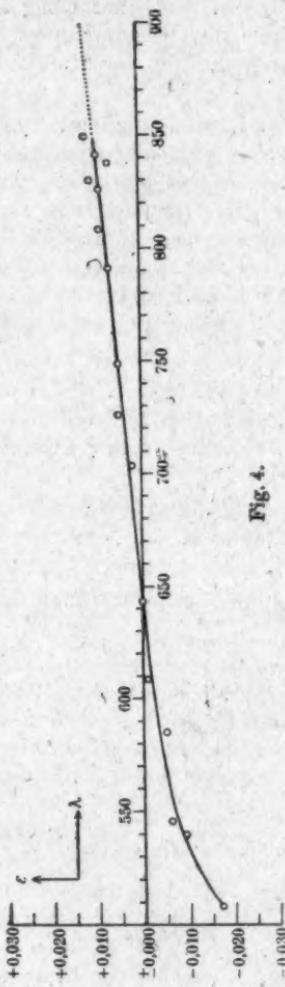


Fig. 4.

2. Die Korrektion wegen der Dispersion der Luft hält sich in viel engeren Grenzen und könnte für die vorliegenden Messungen vernachlässigt werden. Druck und Temperatur bewegten sich innerhalb der Grenzen 715 mm und 790 mm und 8° – 15° , was einer Korrektion von ca. 0,001 Å.-E. im äußersten Rot entspricht.

Trotzdem die Korrektion, je nach Temperatur und Barometerstand, oft noch geringer war, wurde sie doch der Vollständigkeit halber immer in Betracht gezogen.

Die verwendete Korrektionsformel wurde schon von Buisson und Fabry¹⁾ entwickelt und lautet

$$\delta\lambda = \lambda_s (n'_{760}^{15} - n_{760}^{15}) \frac{D_p^t - D_{760}^{15^{\circ}}}{D_{760}^{15^{\circ}}}.$$

n ist der Brechungsexponent der Luft für die Standardlinie, n' der für die Wellenlänge λ_s , beide für 15° und 760 mm.

D ist die Dichte der Luft, jeweils für die angeschriebenen Bedingungen.

Bei den Messungen der grünen Neonlinie waren die Versuchsbedingungen im Mittel 13° und 725 mm Druck. Dies entspricht einer Korrektion von ca. –0,0008 Å.-E.

1) H. Buisson u. Ch. Fabry, Journ. d. Phys. März 1908.

§ 7. Was die Genauigkeit der vorliegenden Messungen betrifft, so ist folgendes darüber zu bemerken.

Die starken Neonlinien dürften mit einer Genauigkeit von $\pm 0,002 \text{ \AA.-E.}$ gemessen sein, die schwächeren, interferometrisch bestimmten Linien bis auf $0,005 \text{ \AA.-E.}$ Schwache Linien, die nur ein oder zweimal mit Etalon gemessen werden konnten, sind in der nachfolgenden Tabelle dadurch gekennzeichnet, daß die dritte Dezimale klein angeschrieben wurde. Bei solchen Linien ist die zweite Dezimale noch sicher.

Die Genauigkeit der Messung wurde wesentlich beeinflußt durch die kleine Dispersion des Spektralapparates, da die Interferenzringe naher Linien übereinander griffen und so die Messung erschwerten. Sollte es in absehbarer Zeit möglich sein, einen geeigneteren Apparat zu erhalten, so sollen, falls die Mühe sich lohnt, Kontrollmessungen ausgeführt werden.

Die Bewertung der Gittermessungen wird nach folgenden Gesichtspunkten zu erfolgen haben. Die Genauigkeit dürfte betragen: für stärkere Linien $\pm 0,08 \text{ \AA.-E.}$, für schwächere $\pm 0,05 \text{ \AA.-E.}$. Die ganz schwachen werden Fehler bis $0,1 \text{ \AA.-E.}$ aufweisen können, da ihre Messung besonders schwierig war. Die angegebenen Fehler sind mögliche Fehler!

§ 8. Die Resultate der Messungen.

Die folgende Tabelle enthält die Messungen. Mit Rücksicht auf die im folgenden zu erörternden Gesetzmäßigkeiten sind in der dritten Spalte auch die Vakuumwellenzahlen angegeben. Die Intensitätsangaben in der ersten Spalte sind einheitlich nach einer Gitteraufnahme durchgeführt. Die Reduktion auf Vakuum erfolgte nach einer Tabelle, die auf Grund der Dispersionsmessungen von Luft berechnet wurde.

Tabelle.

Inten-sität	λ I. $\text{\AA.}\cdot\text{E.}$	Vakuumb-wellenzahl	Inten-sität	λ I. $\text{\AA.}\cdot\text{E.}$	Vakuumb-wellenzahl
4	7051,314	14177,849	8	7535,786	13266,364
4	7059,119	14162,174	8	7544,061	13251,813
3	7125,37	14030,50	1	7724,82	12942,05
3	7138,70	14004,29	1	7833,12	12762,79
3	7304,82	13685,83	2	7838,98	12753,25
6	7472,456	13378,799	2	7927,09	12611,50
0	7495,31	13338,01	3	7937,010	12595,737
0	7528,56	13279,10	8	7943,193	12585,932

Tabelle (Fortsetzung).

Inten-sität	λ I. Å.-E.	Vakuum-wellenzahl	Inten-sität	λ I. Å.-E.	Vakuum-wellenzahl
8	8082,460	12369,063	1	8778,78	11387,98
5	8118,554	12314,079	4	8780,63	11385,575
3	8128,95	12298,338	4	8783,77	11381,503
7	8136,423	12287,035	0	8822,66	11331,34
1	8248,80	12119,64	0	8827,55	11325,07
4	8259,392	12104,101	0	8829,25	11322,88
5	8266,092	12094,290	0	8830,80	11320,90
1	8267,14	12092,78	3	8853,97	11291,27
7	8300,338	12044,392	3	8865,72	11276,31
1	8301,56	12042,62	1	8919,43	11208,41
2	8365,82	11950,12	0	8937,00	11186,37
1	8376,45	11934,95	0	8958,46	11159,58
7	8377,630	11933,271	0	8988,58	11122,18
1	8417,24	11877,13	0	9105,18	10979,74
7	8418,447	11875,412	2	9148,72	10927,49
3	8463,42	11812,30	2	9201,88	10864,36
2	8484,52	11782,93	2	9220,28	10842,68
7	8495,369	11767,598	0	9221,50	10841,25
1	8544,66	11699,99	0	9226,80	10836,02
2	8571,27	11663,68	0	9234,08	10826,48
1	8582,87	11647,93	2	9300,70	10748,93
6	8591,266	11636,531	0	9310,65	10737,44
5	8634,668	11578,041	0	9314,00	10733,59
2	8647,04	11561,49	1	9326,66	10721,30
6	8654,380	11551,670	0	9345,06	10697,91
1	8655,52	11550,14	1	9368,02	10671,70
3	8679,50	11518,24	0	9399,10	10636,40
3	8681,93	11515,02	0	9696,46	10310,21
1	8704,15	11485,62	0	9840,42	10159,40
2	8771,64	11397,24			

Gesetzmäßigkeiten im Spektrum des Neons.

§ 9. Jede Untersuchung über den Bau eines komplizierten Linienspektrums nimmt naturgemäß seinen Ausgang von einer Sichtung des ganzen Wellenzahlenmaterials nach Linien konstanter Schwingungsdifferenzen. Dadurch gelingt es meist, verschiedene Linien zu bestimmten Gruppen zusammenzufassen, wodurch die weitere Untersuchung schon bedeutend vereinfacht wird.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, veröffentlichte als erster H. E. Watson (l. o.) Studien über den Bau des Neon-Spektrums; über die Feststellung konstanter Schwingungsdifferenzen bei den stärksten Linien des Spektrums gelangte er jedoch nicht hinaus, obgleich sein Ziel war, Serien zu finden,

die wohl einen ähnlichen Bau aufweisen, wie die des Heliumspektrums, das durch die Arbeiten von Runge und Paschen¹⁾ und später für das Ultrarot von Paschen²⁾ das am besten geordnete Serienspektrum wurde.

Erst später fand Rossi³⁾, ebenfalls auf der Suche nach den den Heliumserien entsprechenden Serien, zwei Dublettserien und eine einfache Serie.

§ 10. Die von Watson angegebene Ordnung der stärkeren Linien in Triplette und Quadruplette gibt, mit dem neu gefundenen langwelligen Quadruplett, die in Tab. I aufgeführte Ordnung, wenn man, wie in der Note über dieses Thema angemerkt wurde⁴⁾, die Komplexe nach der Größe der Schwingungszahlen anordnet.

Tabelle I.

	Diff.		Diff.		Diff.	
12 869,080 1566,429	1070,067	18 489,177 1566,427	359,332	18 798,500 1566,427	417,450	14 215,959 1399,245
18 935,509 297,370	→	1429,427	←	15 864,986 297,375	417,451	15 615,204 167,183
14 232,879 194,278	1070,078	15 302,957 194,278	359,334	15 662,311 194,269	417,450	16 070,761
14 427,152 456,248	→	1429,428	←	15 856,580 456,248	417,449	16 274,029
14 888,400 86,895	1070,078	15 953,475 86,895	359,333	16 312,828 86,897	417,450	16 730,278
14 969,795 179,941	→	1429,429	←	16 399,225 179,940	417,449	16 816,674
15 149,736 1982,282	1070,080	16 219,816 1982,282	359,349	16 579,165 1982,282	417,451	16 996,616
17 082,022	→	1429,425	←	18 511,447		

Die konstanten Schwingungsdifferenzen der horizontalen Glieder sind im Mittel

$$\overline{1070,078; \quad 359,351 \quad \text{und} \quad 417,450} \\ \overline{1429,429}$$

1) C. Runge u. F. Paschen, *Astroph. Journ.* 1896. 3. p. 4.

2) F. Paschen, *Ann. d. Phys.* 27. p. 537. 1908; 29. p. 625. 1909.

3) R. Rossi, *Phil. Mag.* 26. p. 981. 1913. — Die vorliegenden Resultate wurden ohne Kenntnis von der Arbeit Rossis gefunden, von der ich leider erst später durch Hrn. Prof. Paschen erfuhr.

4) *Physik Zeitschr.* 17. p. 552. 1916.

In Tab. I sind nun noch zwei Vervollständigungen angefügt, die sich nächster rechtfertigen werden:

1. Die Linien 5852 ($\nu = 17\,082,022$) und 5400 ($\nu = 18\,511,447$) zeigen ebenfalls die Schwingungsdifferenz 1429,43 und sind an den entsprechenden Ort angefügt.

2. Die sehr starke Linie 6402 ($\nu = 15\,615,204$) wird in der am meisten rechts stehenden vertikalen Kolumne zwischen 14215,959 und 15782,387 eingeschoben.

In allen bisherigen Veröffentlichungen wurde nun immer das Hauptgewicht auf die Schwingungsdifferenzen der Horizontalreihen gelegt. Eine nähere Untersuchung zeigte jedoch, daß auch den vertikalen Schwingungsdifferenzen eine große, ja größere Bedeutung zukommt.

Geht man von kleinen zu großen Schwingungszahlen, so betragen diese Schwingungsdifferenzen im Mittel:

1399,245	1586,428	456,248
167,188		86,396
297,373		179,941
194,270		1932,284

Die große Mehrzahl der Neonlinien lassen sich nun in Gruppen mit diesen Schwingungsdifferenzen anordnen. Fast vollständig gelingt die Einordnung für die neuen ultraroten Linien und das Maß der Konstanz ihrer Schwingungsdifferenzen dürfte zugleich einen Prüfstein für die Genauigkeit der Messungen bilden.

In *Tabelle II* sind die meisten Gruppen, die sich bisher einordnen ließen, zusammengestellt. Viele davon sind allerdings lückenhaft und ungenau; dies ist jedoch nicht zu verwundern, da viele dieser Linien schwach und deshalb schwer zu messen sind.

Den Rechnungen liegen die Messungen von Watson zugrunde (soweit keine genaueren vorliegen), die auf internationale Ångströmeinheiten umgerechnet wurden. Die Vakuumwellenlängen wurden nach einer Tabelle ermittelt, die nach den Scheelschen Dispersionsmessungen¹⁾ an Luft berechnet wurde. Die Korrekturen für die ultraroten Linien ergab sich durch Extrapolation.

1) K. Scheel, Verh. d. D. Physik. Ges. 9. p. 24. 1907.

Tabelle II.

Nr.	Int.	ν	$\Delta\nu$	Nr.	Int.	ν	$\Delta\nu$
1	8	13251,81		6	—	—	
	—	—	1863,83		1	12042,62	167,21
	1	11387,98			7	11875,41	297,37
	—	—	650,54		5	11578,04	650,55
	0	10737,44			2	10927,49	86,24
	—	—	10471,15		0	10841,25	—
2	8	13266,36		7	—	—	
	—	—	1566,37		7	12044,39	167,26
	1	11699,99			1	11877,13	491,55
	—	—	491,58		—	—	542,90
	1	11208,41			4	11385,58	—
	—	—	542,77		2	10842,68	—
3	—	—	10665,64	8	—	—	
	—	—	10485,70		7	12287,03	194,25
	1	11934,95			1	12082,78	456,25
	7	11767,90	167,05		6	11636,53	86,39
	—	—	491,59		1	11550,14	—
	3	11276,31			—	—	—
4	—	—	542,72	9	—	—	
	0	10733,59			2	12753,25	167,32
	—	—	—		8	12585,93	491,64
	—	—	—		—	—	542,65
	6	13349,51	1399,39		5	12094,29	—
	2	11950,12	167,19		6	11551,64	—
5	2	11782,93	297,31		—	—	—
	1	11485,62	194,35		—	—	—
	3	11291,27	456,25		—	—	—
	0	10835,02	86,09		—	—	—
	2	10748,93	—		—	—	—
	—	10568,85	—		—	—	—
10	6	13378,80	1566,50	10	4	14162,17	1399,38
	—	—	—		(1)	12762,79	167,05
	3	11812,30	297,28		3	12595,74	297,40
	3	11515,02	194,12		4	12298,34	194,24
	0	11320,90	456,54		4	12104,10	456,17
	2	10864,36	—		1	11647,93	86,44
—	—	—	—		2	11561,49	179,99
	—	—	—		4	11381,50	—

Tabelle II (Fortsetzung).

Nr.	Int.	ν	$d\nu$	Nr.	Int.	ν	$d\nu$
11	4	14177,85	1566,35	16	7	18710,12	1863,96
	4	12611,50	297,42		2	16846,16	650,54
	5	12314,08	194,44		1	16195,62	266,37
	1	12119,64	455,96		3	15929,25	
	2	11663,68	86,55		—	—	
	ber.	11577,13	1) ¹⁾ 179,89		7	18717,72	1566,44
	2	11397,24			2	17151,28	491,80
12	5	17570,62	1399,28	17	3	16659,48	542,35
	5	16171,34	167,29		1	16117,13	180,27
	4	16004,05	297,52		3	15936,88	1932,27
	2	15706,53	194,12		2	14004,29	
	4	15512,41	456,32		8	18754,02	1398,97
	1	15056,09	86,36		4	17355,05	167,46
	—	14969,73	179,76		3	17187,59	297,21
13	1	14789,97			4	16890,38	194,61
	—	—			4	16695,77	456,34
	4	17655,15	1566,47		1	16239,43	86,27
	—	—			3	16153,16	
	5	16088,88	297,51		3	15973,17	179,99
	5	15791,17	194,17		—	—	
	3	15597,00	456,25		—	—	
14	3	15140,75		18	4	18769,33	1566,54
	—	—			5	1720°,79	297,28
	—	—			4	1690°,51	650,50
	2	18348,83	1863,96		3	16255,01	
	—	—			—	—	
	3	16484,87	650,52		—	—	
	5	15834,35	266,34		—	—	
15	2	15586,01		19	4	—	
	—	—			5	—	
	4	18398,99	1566,55		5	17223,53	297,30
	—	—			5	16926,14	650,42
	2	16832,44	297,40		2	16275,72	85,56
	3	16535,04	194,34		5u	16190,16	
	4	16340,70	456,37		—	—	
16	5	15884,33	86,37		—	—	
	6	15797,96	179,79		—	—	
	6	15618,17	1032,28		—	—	
	3	13685,89			—	—	
	—	—			—	—	
	—	—			—	—	
	—	—			—	—	

1) λ Luft berechnet = 8635,35 beobachtet und interferometrisch gemessen ist 8634,67. Diese Linien wären mit dem Gitter in zweiter Ordnung sicher getrennt worden. Auf keiner Aufnahme ist eine Spur von 8635,35 zu sehen.

Tabelle II (Fortsetzung).

Nr.	Int.	ν	$\Delta \nu$	Nr.	Int.	ν	$\Delta \nu$
21	—	—		26	3	20709,55	1566,14
	—	—			5	19143,41	297,53
	4	17673,59			3	18845,98	194,24
	—	650,63			4	18651,64	456,06
	5	17022,96			1	18195,58	
	1	266,56			—		
22	1	16758,40			—		
	—	—		27	5	21250,87	1863,62
	6	19539,34			—		
	—	1863,72			0	19387,25	195,17
	2	17675,62			4	19192,08	541,92
	—	650,49			3?	18650,15?	
23	4	17025,13			2	18470,21	179,94
	—	266,49			—		
	3	16758,64		28	5	21230,79	
	—	—			—		
	4	17971,99			—		2057,98
	5	17480,35	491,64		1	19172,81	
24	—	—			—		
	5	16937,50	542,85		2	18450,2	722,59
	—	—			—		
	3	19550,19		29	4	22031,14	1565,46
	—	1863,72			4	20465,68	297,80
	2	17686,47			3	20167,88	193,81
25	—	650,57			2	19974,07	456,73
	3	17035,80	86,33		4	19517,34	85,98
	1	16949,47	179,94		5	19431,36	180,36
	2	16769,53	1932,28		4	19251,00	
	2	14837,26			—	—	
	5	20666,88	1399,24	30	3	22038,23	
25	5	19267,64	166,98		—		1863,76
	4	19100,66	297,38		0	20174,47	
	1	18803,28	194,37		0	19523,78	650,69
	4	18608,91			2	19257,77	266,01
	—	542,65			0	17325,56	1932,21
	1	18068,26	179,51		—		
—	1	17886,75			—		
	—	—			—		

Tabelle II (Fortsetzung).

Nr.	Int.	ν	$\Delta \nu$	Nr.	Int.	ν	$\Delta \nu$
31	3	22275,09	1399,27	33	2	23066,14	1566,27
	4	20875,82	658,44		1	21499,87	491,42
	—	—	—		1	21008,45	456,42
	2	20217,38	—		—	20552,03?	86,35
	—	—	—		4	20465,68	—
	—	—	—		—	—	—
32	0	22298,93	1565,94	34	4	21469,87	1566,54
	—	—	—		0	19903,33	491,64
	3	20732,99	297,13		—	—	—
	2	20435,86	194,22		0	19411,69	456,25
	2	20241,64	—		0	18955,44	86,20
	—	—	—		4	18869,24	—
	—	—	—		1	18689,28	179,96

Ein Hauptunterschied zwischen den Gruppen in Tab. II und denen in Tab. I springt sofort in die Augen: die Gruppen der Tab. II sind umgekehrt gelagert, wie die der Tab. I. Während die Glieder der Gruppen I die Schwingungsdifferenzen in der oben angegebenen Reihenfolge (1566; 297; usf.) ergeben, falls man von kleinen zu großen Wellenzahlen fortschreitet, ist dies bei den Gliedern der Gruppen II umgekehrt. Fig. 5 erläutert den Sachverhalt.

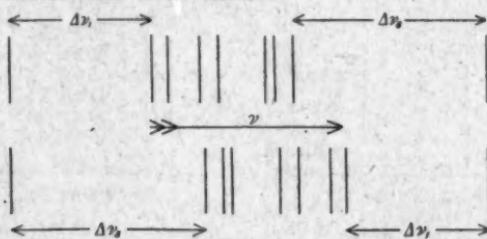


Fig. 5.

Diese Tatsache erinnert sofort an die Verhältnisse bei einem gewöhnlichen Triplettsystem:

Das Grundglied der Hauptserie und der zweiten Nebenserien ist umgekehrt gelagert wie die übrigen Glieder der zweiten Nebenserien und die Glieder der ersten Nebenserien.

Diese Analogie ist zu auffallend, als daß man sie sich entgehen ließe. Sollten also im Neonspektrum auch Serien auftreten, die im wesentlichen denselben Grundgesetzen gehorchen, wie wir sie von den anderen Spektren her kennen, so müßte man folgendes schließen:

1. Die Tab. I enthält die Gruppen, die die Grundglieder der Hauptserie und zweiten Nebenserien darstellen.

2. Tab. II enthält die Glieder der ersten Nebenserien und die Glieder der zweiten Nebenserien, mit Ausnahme des ersten.

Nach diesen Annahmen ist man weiter verleitet, anzunehmen, daß im kurzweligen Gebiete die von Watson angegebenen, in Tab. Ia zusammengestellten Gruppen mit den (horizontalen) Schwingungsdifferenzen 1070; 359; 417 die Glieder der Hauptserie darstellen.

Wieweit diese Schlüsse zutreffen, soll in den folgenden Paragraphen gezeigt werden, in denen die bisher ermittelten Serien aufgestellt sind.

Tabelle Ia.

J	ν	J	ν	J	ν	J	ν
3	26629,46	3	27699,22	2	28058,80	4	28475,99
5	27010,82			5	28439,95	4	28857,52
4	27124,08			5	28550,05	4	28971,06
4	27149,79			5	28579,35	5	28996,60
5	27512,86			5	28942,30		
6	27768,52	5	28838,89	3	29187,76	5	29615,86
8	27819,74	5	28889,62	5	29249,43	5	29666,15
2	31561,57	2	32630,58	2	32990,46	3	33407,61
2	31705,93			3	33132,00	2	33548,15
2	31751,17			3	33180,15	1	33597,63
1	31760,06			3	33189,40	3	33606,44
2	31978,41			3	33407,61		
1	32466,69	1	33536,68	1 u	33896,35	2	34316,74
1	32469,64	1	33539,49			1	34337,09
2	32490,11			3	33917,97		
3	32698,12			1	34127,13		

$$\Delta \nu = 1070,08$$

$$\Delta \nu = 359,85$$

$$\Delta \nu = 417,45$$

§ 11. Viele der in Tab. II gegebenen Gruppen sind unvollständig, und zunächst wäre man geneigt, die Schuld daran ungenauen und nicht erschöpfenden Messungen zuzuschreiben. Wie wir weiter unten sehen werden, trifft dies auch bei den Messungen Watsons zu; manche schwache Linie, die eigentlich da sein müßte, fehlt bei ihm und nahe Doppellinien trennt er nicht.

Die langwelligen Glieder jedoch sind von mir mit größter Sorgfalt untersucht worden. Auf langfristigen Aufnahmen (bis zu 20 Stunden) hätten sicher auch die schwächsten Komponenten zum Vorschein kommen müssen. Es dürfte deshalb außer jedem Zweifel stehen, daß die Lücken bei den ultravioletten Gliedern reell sind. Nur bei den ganz langwelligen Gliedern kann diese Behauptung fehlgehen, da jenseits 9300 Å.-E. die Empfindlichkeit der Platten doch wesentlich zurückgeht.

Ein Vergleich der einzelnen Gruppen zeigte nun zudem, daß dieselbe Konfiguration, also Gruppen mit entsprechenden Lücken und derselben Reihenfolge der Intensität der Linien systematisch wiederkehren (wenn man von dem Fehlen der Linien absieht, die schon bei den ultravioletten Gliedern sehr schwach sind). Damit waren durch den Habitus der einzelnen Gruppen ganz bestimmte einander zugeordnet und eine Überschlagsberechnung, bei der die Tabellen von Dunz¹⁾ vorzügliche Dienste leisteten, zeigte, daß die meisten der einzelnen Gruppen Glieder von Serien sind, die den Charakter einer ersten Nebenserien tragen. Eine Serie einfacher Linien wurde im Anschluß hieran ermittelt.

Schon jetzt sei erwähnt, daß diese Serien auch die Rossischen in sich schließen, doch nicht als Dublettserien konstanter Schwingungsdifferenz, wie sie von Rossi gegeben sind.

§ 12. Die einzelnen Serien.

Vorbemerkung. Die Serienrechnungen wurden für internationale Ångströmeinheiten nach der Ritzschen Formel berechnet.

$$\nu = G - \frac{N}{(m + d + \delta(G - \nu))^2},$$

wo ν die Vakuumwellenzahl, G die Grenze der Serie und N die Rydbergkonstante bedeutet. Als Wert von N liegt zugrunde 109730,00, eine Zahl, die aus den Messungen von Paschen über Wasserstoff und Bohrs Heliumlinien²⁾ extrapoliert wurde. Natürlich ist diese Wahl für das Folgende un wesentlich.

Schon eine Überschlagsbetrachtung über den Verlauf der nachfolgenden 8 Seriengruppen D_1 bis D_7 zeigt, daß sie (zu-

1) B. Dunz, Inaug.-Diss. Tübingen 1911.

2) F. Paschen, Ann. d. Phys. 50. p. 935. 1916.

nächst als vollständige Oktette betrachtet) nach denselben Grenzen konvergieren. Dies wurde noch rechnerisch geprüft; aus drei aufeinanderfolgenden Gliedern ($m = 4, 5, 6$) wurden die Grenzen berechnet, wobei sich bei den Serien D_1 bis D_6 eine Übereinstimmung ergab, die in Anbetracht der den Wellenlängenwerten anhaftenden Fehler¹⁾ ganz gut war. Die Serien D_6 und D_7 gaben allerdings etwas größere Abweichungen.

Die endgültigen, den Rechnungen zugrunde liegenden Grenzwerte wurden aus den drei folgenden, der Serie D_2 angehörenden Linien gewonnen:

Intensität	λ I. Å.-E. (Watson, Korrig.)	v Vak.	m
5	5804,40	17223,53	4
4	5074,17	19702,18	5
4	4749,56	21048,73	6

Aus diesen Linien ergab sich die Grenze G_3 zu 24105,72. Mit Hilfe der aus Tab. I sehr genau bekannten Schwingungsdifferenzen wurden dann die anderen Grenzwerte berechnet.

Somit sind die den Rechnungen zugrunde liegenden Werte der Grenzen:

	λ v
$G_1 = 25672,15$	1399,25
$G_2 = 24272,90$	167,18
$G_3 = 24105,72$	297,37
$G_4 = 23808,35$	194,27
$G_5 = 23614,08$	456,25
$G_6 = 23157,83$	86,40
$G_7 = 23071,43$	179,94
$G_8 = 22891,49$	1932,28
[$G_9 = 20959,21$]	

Die folgenden acht Tabellen enthalten nun acht Seriengruppen, die nach diesen Grenzen (G_1 bis G_9) konvergieren. Mit Ausnahme der Serien D_6 und D_7 sind alle durch die Ritzsche Formel ziemlich gut dargestellt. Wie schon oben erwähnt, ist die Darstellung bei D_6 und D_7 weniger gut. Die Grenzen, die man für diese Serien erhält, liegen allerdings etwas höher als die oben berechneten. An der Zusammengehörigkeit dieser Gruppen zu einer Serie ist aber wohl nicht zu zweifeln, da der gleiche Bau und die Intensitätsabnahme mit wachsender Seriennummer dafür sprechen; dies beweist ja oft mehr als eine Berechnung mit nicht genau bekannten Wellenlängen.

1) Diese Fehler der Messungen Watsons sind etwa zu $\pm 0,05$ Å.-E. anzunehmen, wie einige interferometrisch ermittelte Werte ergaben.

Bemerkungen zu den einzelnen Serien:

Serie D_1 und D_2 . Die schwächeren Trabanten der Linien 8300 und 8418, wie bei Serie D_5 und D_{5a} der Linie 8877, konnte in den höheren Ordnungszahlen nicht nachgewiesen werden, obgleich dies sehr wichtig gewesen wäre. Mit dem kleinen Gitter war die Trennung unmöglich; mit dem Etalon ist der Nachweis wohl deshalb nicht gelungen, weil die Intensitäten der beiden Linien gar zu verschieden sind, so daß die Hauptlinie die schwächere überstrahlt.

Ebenso war es mit der Trennung der Linien $G_7 - md_1$ und $G_7 - md_2$, die auch nur bei den ultraroten Linien gelang. Doch deutet wohl das „u“ (unscharf) Watsons darauf hin, daß die Linie $G_7 - 4d_{1,2}$ doppelt ist.

Serie D_1 .

Konstanten der Serienformel: $d_1 = -0,009273$; $\delta_1 = 3,7556 \cdot 10^{-7}$, berechnet aus $G_5 - 4d_1 = 16732,96$ und $G_5 - 5d_1 = 19211,37$.

m	3	4	5	6	7	8	9
$G_1 - md_1$							
λ beob.	(7) 8900,34	(5) 5748,26	(5) 5084,30	(8) 4712,04	(1) 4598,32		
$G_2 - md_1$	12 044,39	17 391,79	19 870,05	21 216,29	22 028,42		
λ ber.	8801,60	5748,25	5081,26	4711,99	4598,38		
λ beob.	(1) 6417,34	Nicht beob.					
$G_3 - md_1$	11 877,13	1 Luft ber.					
λ ber.	8418,49	5974,85					
$G_4 - md_1$							
λ beob.	(4) 8780,88	(5) 5974,80	(5) 5208,80	(9) 4863,04	(1) 4678,19	(0) 4565,86	(0) 4491,80
$G_5 - md_1$	11 385,58	16 732,96	19 211,37	20 557,73	21 369,85	21 895,54	22 256,55
λ ber.	8782,05	5974,80	5208,80	4863,04	4678,19	4565,81	4491,77
$G_6 - md_1$							
λ beob.	(2) 9220,28	(5 n) 6174,88	(8) 5355,18	(0) 4994,84	(1) 4800,11		
$G_7 - md_1$	10 842,68	16 190,16	18 668,31	20 015,09	20 827,04		
λ ber.	9221,66	16 174,82	18 655,06	4994,87	4800,16		
$G_8 - md_1$							
md_1 beob. Mittelwert	12228,59	6881,11 ¹⁾	4402,79	3056,48	2244,36	1718,54	1357,68
md_1 ber.	12230,35	6881,12	4402,71	3056,35	2244,79	1718,24	1357,36

1) Mittel ohne Berücksichtigung von $G_7 - md_1$.

Serie D₂.Konstanten der Serienformel: $d_2 = -0,010191$; $\delta_s = 4,6376 \cdot 10^{-7}$, berechnet aus 17223,63 und 19702,18.

m	3	4	5	6	7	8	9
$G_1 - md_2$							
$\frac{1}{4}$ beob. $G_1 - md_2$ $\frac{1}{4}$ ber.	(1) 6801,65 12012,62 8800,72						
$G_1 - md_2$	(1) 6801,65 12012,62 8800,72						
$\frac{1}{4}$ beob. $G_1 - md_2$ $\frac{1}{4}$ ber.	(7) 8418,45 11875,11 8417,65	(5) 6804,40 17223,53 6804,40	(8) 5004,17 19102,18 8074,17	(4) 4749,56 21048,73 4749,56	(1) 4572,96 21861,60 4673,20	(1) 4466,02 22387,04 4465,69	
$G_1 - md_2$	(6) 8684,67 11788,04 8685,75	(6) 5906,38 16926,14 5906,38	(6) 6151,90 19404,93 6161,96	(6) 4617,62 20751,37 4617,62	(9) 4636,09 21663,90 4636,09		
$G_1 - md_2$							
$\frac{1}{4}$ beob. $G_1 - md_2$ $\frac{1}{4}$ ber.	(2) 9148,72 101927,49 9147,64	(2) 6129,43 16276,72 6129,46	(2) 6500,65		(1) 4780,27 20913,50 4780,49		
$G_1 - md_2$	(0) 9221,60 10841,25 9230,64	(0,a) 6174,88 ^{b)} 16130,16 6176,35	8956,30	[(0) 4694,84]	[(1) 4600,11]		
$G_1 - md_2$							
md_2 beob. Mittel	12230,28	6862,17 ^{a)}	4403,48	3056,99	2244,60	1718,68	
md_2 berechnet	12229,04	6882,19	4403,54	3056,99	2245,26	1718,56	

1) Das "unscharf" deutet wohl auf die Doppelheit dieser Linie.
 2) Ohne Berücksichtigung von $(G_3 - 4d_2)$.
 3) Beobachtet $\lambda = 5330,71$.

Serie D_s.

Serienkonstanten: $d_3 = -0,014112$; $\delta_3 = 1,6326 \cdot 10^{-7}$;
berechnet aus $G_1 - 4d_3 = 18769,33$ und $G_1 - 5d_3 = 21259,36$.

m	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{1}{4} \text{ beob.}$ $G_1 - md_3$ $\frac{1}{4} \text{ ber.}$	(6) 7472,46 13 378,80 7471,16	(4) 6326,36 18 769,33 6326,36	(1) 4702,60 21 259,36 4702,60				
$G_1 - md_3$							
$\frac{1}{4} \text{ beob.}$ $G_1 - md_3$ $\frac{1}{4} \text{ ber.}$	(5) 8463,49 11 812,30 8461,70	(6) 6611,40 17 202,79 5811,36	(6) 6076,66 19 692,96 6076,66				
$\frac{1}{4} \text{ beob.}$ $G_1 - md_3$ $\frac{1}{4} \text{ ber.}$	(6) 8861,38 11 515,02 8860,18	(4) 6913,39 16 905,51 5913,86	(3) 6154,37 19 395,63 5154,79	(8) 4618,76 20 746,46 4618,77	(6) 4636,64 21 661,34 4636,94	(6) 4626,87 22 089,00 4626,12	
$\frac{1}{4} \text{ beob.}$ $G_1 - md_3$ $\frac{1}{4} \text{ ber.}$	(6) 8880,30 11 320,90 8829,13	berechnet 16711,84 *)		(6) 4964,94 20 552,03 4964,91			
$\frac{1}{4} \text{ beob.}$ $G_1 - md_3$ $\frac{1}{4} \text{ ber.}$	(2) 9201,88 10 864,36 9193,78	(6) 6150,26 16 255,01 6150,26	(6) 6353,31 18 455,23 6353,26				
$G_1 - md_3$							
$G_1 - md_3$							
$md_3 \text{ beob.}$ Mittel	12 293,35	6902,85	4412,72	3061,89	2247,01	1719,35	
$md_3 \text{ ber.}$	12 291,01	6902,82	4412,70	3061,93	2248,20	1720,50	
1) Beobachtet	10 710,81						

Serienkonstanten: $d_4 = -0.019567$; $d_4 = 3.1539 \cdot 10^{-7}$, berechnet aus $G_1 - 4d_4 = 18754,02$ und $G_1 - 5d_4 = 21250,87$.

Serie D_4							
m	3	4	5	6	7	8	0
$\frac{1}{4}$ beob. $G_1 - m d_4$ $\frac{1}{4}$ ber.	(6) 7488,85 13349,51	(8) 6530,71 18754,02	(5) 4704,87 21250,87	(3) 4422,70 22605,15	berechnet 23420,65	berechnet 23419,44	
$\frac{1}{4}$ beob. $G_2 - m d_4$ $\frac{1}{4}$ ber.	(2) 8856,89 11950,12	(4) 6760,49 17355,05	(0) 6086,94 19851,75	(1) 4714,41 21205,62	berechnet 22021,40	berechnet 22250,19	
$\frac{1}{4}$ beob. $G_3 - m d_4$ $\frac{1}{4}$ ber.	(0) 6484,52 11782,93	(2) 6516,64 17187,59	(1) 19684,44 21038,88	berechnet 21038,88			
$\frac{1}{4}$ beob. $G_4 - m d_4$ $\frac{1}{4}$ ber.	(1) 8704,15 11485,62	(4) 6919,59 16890,36	(0) 5156,00 19387,25	berechnet 20741,31			
$\frac{1}{4}$ beob. $G_5 - m d_4$ $\frac{1}{4}$ ber.	(0) 8885,97 11291,27	(4) 6887,98 16695,77	(4) 8295,76 19193,08	(2) 4695,49 20547,17	berechnet 21362,58		
$\frac{1}{4}$ beob. $G_6 - m d_4$ $\frac{1}{4}$ ber.	(0) 9226,80 10835,02	(1) 6166,15 16259,43	berechnet 18736,55				
$\frac{1}{4}$ beob. $G_7 - m d_4$ $\frac{1}{4}$ ber.	(2) 9300,70 10748,93	(3) 6180,68 16153,16	berechnet 18650,15				
$\frac{1}{4}$ beob. $G_8 - m d_4$ $\frac{1}{4}$ ber.	ber. aus 13849 10568,85	(3) 6266,77 15973,17	(2) 6412,69 18470,32	berechnet 19824,45			
$m d_4$ beob. Mittel	12322,72	6918,17	4421,18	3067,97			
$m d_4$ berechnet	12320,69	6918,13	4421,28	3067,04	2251,50	1722,71	

1) Beob. ist 5359,97 (3). Diese Linie gehört zu der Serie „ S_{g} “ ($m = 4,5$). Die Linien können bei Watson nicht getrennt sein.

Serienkonstanten $d_s = -0,0202391$ und $\delta_s = 5,0897 \cdot 10^{-7}$; berechnet aus $G_3 - 4d_s = 17177,17$ und $G_3 - 5d_s = 19678,26$.

m	3	4	5	6	7	8	9
$G_1 - md_s$							
$G_2 - md_s$ λ beob. λ ber.	11934,95 8876,66	119376,66					
$G_3 - md_s$ λ beob. λ ber.	(7) 8495,96 11767,39 8194,64	(6) 8620,07 17177,17 8390,07	(6) 5680,94 19678,26 5680,94	(5) 4732,73 21034,65 4732,67	(5) 4675,09 21851,38 4675,03	(1) 4466,84 22380,93 4466,77	(0) 4395,82 22743,56 4395,63
$G_4 - md_s$							
$G_5 - md_s$ λ beob. λ ber.	(3) 8865,72 11276,31 8894,97	(4) 5691,68 16685,46 6891,56	(3) 5210,01 19186,64 6810,51	(1) 4686,42 20543,25 4686,42	(0) 4680,82 21380,08 4680,32		
$G_6 - md_s'$							
$G_7 - md_s$ λ beob. λ ber.	(0) 9814,00 10733,59 9818,13	(3) 6193,02 16142,76 6192,97	berechnet 16648,97				
$G_8 - md_s$							
md_s : beob. Mittel	12237,80	6928,62	4427,45	3070,96	2254,17	1724,79	1362,16
md_s ber.	12230,83	6928,65	4427,46	3070,81	2254,02	1724,44	1361,70
Serie D_{3a}							
y	11933,27	17343,29	19844,85	21201,53	22018,42	22548,32	22910,87
md_s : beob.	12239,63	6929,61	4428,05	3071,37	2254,48	1724,58	1362,03
md_s ber.	12238,87	6929,61	4428,05	3071,34	2254,25	1724,60	1361,82
λ Lauf beob.	(7) 8377,63	(7) 5764,55	(6) 5037,87	(5) 4715,50	(3) 4540,55	(2) 4433,89	(0) 4363,69
λ Lauf ber.	8377,13	5764,55	5037,87	4715,47	4540,50	4433,80	4363,65

Grenze 24272,90; Konstanten ermittelt aus 17343,29 und 19844,85. $d = -0,024278$; $\delta = 5,1850 \cdot 10^{-7}$.

Serie D₆.

Konstanten der Serienformel: $d_6 = -0,0322371$; $d_6 = 0,5835 \cdot 10^{-7}$
berechnet aus $G_1 - 4d_6 = 18717,72$ und $G_1 - 5d_6 = 21230,79$.

m	3	4	5	6	7	8	9
λ beob. $G_1 - md_6$ λ ber.	(6) 7685,79 13 286,36 7627,63	(7) 5941,06 18717,72 6941,06	(5) 4706,82 21 230,79 4706,82	(2) 4424,79 22 563,61 4424,90	(1) 4302,76 23 413,94 4303,96	(0) 4175,24 23 044,01 4176,21	
$G_2 - md_6$							
λ beob. $G_3 - md_6$ λ ber.	(1) 8644,95 11 699,39 8639,24	(2) 6828,86 17 151,28 6828,86	ber. aus 21230 19 064,36				
$G_4 - md_6$							
λ beob. $G_5 - md_6$ λ ber.	(1) 8819,48 11 208,41 8608,23	(3) 6000,98 16 659,48 6000,87	(1) 6214,77 19 172,81 6214,79	(0) 4866,17 20 635,86 4866,88			
$G_6 - md_6$							
λ beob. $G_7 - md_6$ λ ber.	ber. aus 13296 10 665,84 9373,34	(1) 6202,67 16 117,13 6202,52	ber. aus 21230 - 18630,07				
$G_8 - md_6$							
λ beob. $G_9 - md_6$ λ ber.	ber. aus 13296 10 485,70 9394,18	(3) 6273,02 15 936,96 6272,94	(2) 5418,49 18 450,22 5418,01	berechnet 19812,37			
md_6 beob. Mittel	12 405,73	6954,46	4441,30	3078,38	2258,21	1728,14	
md_6 ber.	12 391,44	6954,43	4441,36	3079,12	2259,27	1728,00	

Serie D₇.

Serienkonstanten: $d_7 = -0,0389972$; $\delta_7 = 1,000699 \cdot 10^{-6}$,
berechnet aus $G_1 - 4 d_7 = 18710,12$ und $G_1 - 5 d_7 = 21225,34$.

m	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{1}{4}$ beob. $G_1 - m d_7$ $\frac{1}{4}$ ber.	(8) 7514,06 13251,81 7028,99	(7) 5848,21 18710,12 6348,21	(4) 4710,08 21225,34 4710,08	(2) 4425,40 22580,50 4425,63	(0) 4270,26 23411,25 4270,41	(0) 4175,24 23944,01 4175,62	
$G_2 - m d_7$							
$G_3 - m d_7$							
$\frac{1}{4}$ beob. $G_4 - m d_7$ $\frac{1}{4}$ ber.	(0) 8768,78 11387,98 8768,58	(2) 5934,48 16846,16 6934,37	berechnet 19361,54	(1) 4623,17 20726,45 4823,87			
$G_5 - m d_7$							
$\frac{1}{4}$ beob. $G_6 - m d_7$ $\frac{1}{4}$ ber.	(0) 9810,65 10737,44 9287,73	(1) 6152,80 16195,62 6172,78	berechnet 18711,02				
$G_7 - m d_7$							
$\frac{1}{4}$ beob. $G_8 - m d_7$ $\frac{1}{4}$ ber.	berechnet aus 18261 10471,15 9347,42	(3) 6276,09 15929,25 6376,00	(0) 5420,08 18444,81 6420,11				
$m d_7$ beob. Mittel	12420,26	6962,16	4446,75	3081,65	2260,90	1728,14	
$m d_7$ berechnet	12303,76	6962,03	4446,81	2082,76	2261,75	1729,73	

Die Trennung der Linie $G_6 - m d_2 \lambda_{\text{ber.}} = 5330,63$ von der starken Linie 5330,71 gelang ebenfalls nicht.

In Serie D_2 ist die Linie $G_6 - 7 d_2 \lambda = 4780,27$ vielleicht nicht eingereiht. Denn dann müßte Watson auch die Linie $\nu = 20100,85$ führen. Die gleiche Bemerkung ist in Serie D_3 für die Linie $G_5 - 6 d_3 (\lambda = 4864,34)$ zu machen.

Serie D₄. Die Glieder $G_1 - 7 d_3$ und $G_5 - 7 d_4$ müßten eigentlich da sein, da die Intensitäten der vorangehenden Linien noch genügend groß sind. Es berechnen sich:

$$G_1 - 7 d_4 = 23420,65; \quad G_1 - 8 d_4 = 23949,44;$$

$$G_5 - 7 d_4 = 21362,58.$$

Ob die beobachteten Schwingungszahlen (1) 23423,48; (0) 23948,60 und 21365,60 mit diesen identisch sind, ist fraglich, da diese Abweichungen zu groß sind.

Serie D₅. Über die schwachen Linien $G_2 - m d_5$ wurde schon oben gesprochen. Auffallend ist das Fehlen der weiteren Linien $G_7 - m d_5$, die nach der Intensität der Linie 6198,02 (Int. 3) zu schließen, vorhanden sein müßten.

Bei Serie D_6 sollte noch die Linie $G_4 - 5 d_7$ beobachtet sein.

Diese acht Seriengruppen, die offenbar in engem Zusammenhange stehen, bilden wohl die erste Nebenserie eines „Oktett“-Systems. Falls sich aus besseren Messungen eindeutig beweisen ließe, daß diese Serien nach derselben Grenze streben, so wäre eine deutliche Analogie zwischen diesen Serien und den Dublett- und Triplettsystemen, die man bisher kennt, zu konstatieren:

Die erste Nebenserie eines Dublettsystems ist charakterisiert durch zwei Grenzen und zwei Terme (ein Satellit), die eines Triplettsystems durch drei Grenzen und drei Terme (drei Satelliten), während man es hier mit acht Grenzen und acht Termen zu tun hätte. Von Wichtigkeit ist die Kenntnis, welche Grenz-Term-Kombinationen vorkommen können. So weit eine Feststellung bei den unvollständigen Messungen möglich ist, treten die in folgendem Schema angedeuteten Linien auf.

	md_1	md_2	md_3	md_4	md_5	md_{5a}	md_6	md_7
G_1			stark	stark			stark	stark
G_2	stark	schwach		mittel	schwach	stark		
G_3	schwach	stark	mittel	mittel	stark		schwach	
G_4		mittel	mittel	schwach				schwach
G_5	mittel		schwach	mittel	mittel		mittel	
G_6		mittel	mittel	mittel				schwach
G_7	mittel	schwach		mittel	mittel		schwach	schwach
G_8				mittel			[mittel]	

Wie man aus dieser Zusammenstellung ersieht, weisen die Serien mit den Termen md_1 und md_2 ; md_5 und md_{5a} insofern einen ähnlichen Bau auf, als bei ihnen die Grenzen G_1 und G_8 nicht vorkommen. Ebenso gehören wohl die Serien D_3 , D_4 , D_6 und D_7 enger zusammen. Die gleiche Beobachtung kann man machen, wenn man die Serienkonstanten vergleicht, von denen hier noch eine Zusammenstellung folgen soll.

$$\begin{array}{ll}
 d_1 = -0,009273, & \delta_1 = 3,7556 \cdot 10^{-7}, \\
 d_2 = -0,010191, & \delta_2 = 4,6376 \cdot 10^{-7}, \\
 d_3 = -0,014112, & \delta_3 = 1,6526 \cdot 10^{-7}, \\
 d_4 = -0,019567, & \delta_4 = 3,1539 \cdot 10^{-7}, \\
 d_5 = -0,020381, & \delta_5 = 5,0887 \cdot 10^{-7}, \\
 d_{5a} = -0,024278, & \delta_{5a} = 5,1850 \cdot 10^{-7}, \\
 d_6 = -0,032371, & \delta_6 = 6,5835 \cdot 10^{-7}, \\
 d_7 = -0,036972, & \delta_7 = 10,0699 \cdot 10^{-7}.
 \end{array}$$

Der Wert von „ δ “ weist in dieser Reihenfolge einen unregelmäßigen Gang auf, der verschwindet, wenn man die Anordnung in zwei Teile trennt: d_1 , d_2 , d_5 , d_{5a} und d_3 , d_4 , d_6 , d_7 .

Nach der Feststellung dieser ersten Nebenserie ist die nächste Frage die nach der ihr entsprechenden zweiten Nebenserie, die also auch dieselben Grenzen G_1 bis G_8 haben müßte.

Es gelang nun, zwei solche Seriengruppen aufzufinden. Es sind die auf den folgenden zwei Tabellen geführten Serien S_1 und S_2 .

Daß diese Serien nach denselben Grenzen konvergieren, wurde wiederum rechnerisch geprüft.

Serie δ_1 .
Seriennkonstanten: $s_1 = 0,18529$; $\sigma_1 = -6,2129 \cdot 10^{-7}$;
berechnet aus $G_1 - 3,5 s_1 = 17570,62$ und $G_1 - 4,5 s_1 = 20666,88$

m	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5
¹ beob. $G_1 - m s_1$ ¹ ber.	(8) 7092,41 14215,20 7079,70	berechnet: 10346,27	(5) 5680,74 17570,62 8880,74	(5) 4887,31 20666,88 4887,31	(3) 4488,06 22275,08 4488,12	(1) 4906,92 23215,16 * 4906,08	(0) 4198,19 23813,10? 4198,07?
¹ beob. $G_1 - m s_1$ ¹ ber.	(10) 15615,20		(6) 6182,07 16171,34 6182,06	(6) 5188,51 19268,01 6188,60	(4) 4788,89 20875,82 4788,96	(2) 4582,43 21816,36 4582,38	(0) 4469,86 22416,95? 4460,14
¹ beob. $G_1 - m s_1$ ¹ ber.	(2) 15782,39		(4) 6246,69 16004,05 6246,65	(4) 6238,97 19100,66 6234,02	berechnet: 20708,66 20709 dopp.?	(0) 4617,86 21649,00 4617,77	
¹ beob. $G_1 - m s_1$ ¹ ber.	(6) 16079,76	*	(2) 6395,02 15706,43 6395,13	(1) 6316,74 18803,28 6316,79			
¹ beob. $G_1 - m s_1$ ¹ ber.	(10) 16274,03		(4) 6444,67 15512,41 6444,61	(4) 5372,28 18608,91 6372,93	(2) 4944,87 20217,38 4945,08	(1) 4726,14 21167,48 4726,04	
¹ beob. $G_1 - m s_1$ ¹ ber.	(6) 16730,28		(1) 6640,00 15066,00 6689,91	(1) 6588,51 18162,66 6589,55	berechnet:		
¹ beob. $G_1 - m s_1$ ¹ ber.	(8) 16816,87		berechnet: 14969,80 6678 dopp.?	(1) 6588,51 18066,26 6589,55			
¹ beob. $G_1 - m s_1$ ¹ ber.	(6) 16996,62		(1) 6759,46 14789,97 6769,48	(1) 5589,18 17886,75 5589,36			
$m s_1$ beob. Mittel	30888,11		8101,04	5006,05	3396,95	2466,73	
$m s_1$ ber.	30793,14	15325,88	8101,03	5006,27	3397,96	2456,30	1868,36

Konstanten $s_1 = +0,209099$; $s_1^* = -0,1117 \cdot 10^{-7}$;
aus $G_3 = 3,5 s_1 = 16,088,68$ und $G_3 - 4,5 s_1 = 19,143,41$ für $\theta_1 = 24105,72$.

m	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5
$\frac{1}{4}$ beob. $G_1 - m \cdot s_2$ $\frac{1}{4}$ ber.	(6) 13798,51	berechnet: 10542,53	(4) 17655,16 5695,60	(3) 20700,56 4827,27	(0) 22288,93 4483,17	(0) 4480,36 4483,17	(0) 4491,80 4491,61
$G_2 - m \cdot s_2$							
$\frac{1}{4}$ beob. $G_2 - m \cdot s_2$ $\frac{1}{4}$ ber.	(9) 16364,94 6877,91		(5) 16088,68 6212,98	(5) 19143,41 6222,98	(3) 20732,90 4821,88	(3) 21665,37 4614,50	(0) 4491,80 22256,56
$G_3 - m \cdot s_2$							
$\frac{1}{4}$ beob. $G_3 - m \cdot s_2$ $\frac{1}{4}$ ber.	(6) 16669,31		(4) 16290,90 6830,88	(4) 15791,17 6830,88	(3) 18845,88 6804,69	(3) 18692,90 20435,80	(0) 4491,80 20435,80
$G_4 - m \cdot s_2$							
$\frac{1}{4}$ beob. $G_4 - m \cdot s_2$ $\frac{1}{4}$ ber.	(6) 15856,58		(3) 16409,72 6869,70	(4) 15597,00 6869,70	(4) 18651,64 6869,68	(2) 18888,94 20241,64	(1) 4721,64 4721,66
$G_5 - m \cdot s_2$							
$\frac{1}{4}$ beob. $G_5 - m \cdot s_2$ $\frac{1}{4}$ ber.	(1) 16312,83		(3) 16140,76 6802,86	(1) 15605,35 6860,76	(1) 18195,68 5894,53		
$G_6 - m \cdot s_2$							
$\frac{1}{4}$ beob. $G_6 - m \cdot s_2$ $\frac{1}{4}$ ber.	(10) 16389,23				berechnet: 15054,35	berechnet: 14874,41	
$G_7 - m \cdot s_2$							
$\frac{1}{4}$ beob. $G_7 - m \cdot s_2$ $\frac{1}{4}$ ber.	(6) 16579,17				berechnet: 14874,41	berechnet: 14874,41	
$G_8 - m \cdot s_2$							
$\frac{1}{4}$ beob. $G_8 - m \cdot s_2$ $\frac{1}{4}$ ber.	(8) 18511,45				(1) 17234,62 12942,05 7723,65	berechnet: 15996,90	
$m \cdot s_2$ beob. Mittel	39470,86		8017,09	4962,41	3372,72	2440,40	1849,17
$m \cdot s_2$ b.r.	39303,89	15129,02	8017,04	4962,31	3372,76	2440,97	1848,20

1. An der Serie S_2 :

Aus $\nu_1 = 16088,68$, $\nu_2 = 19143,41$ und $\nu_3 = 20792,99$ berechnet sich die Grenze (nach der Ritzschen Formel) zu $24105,84$ ($+ 1566,43 = 25672,27$), während der entsprechende Wert der ersten Nebenserien $24105,72$ ist.

2. An der Serie S_1 :

Aus $\nu_1 = 17570,62$; $\nu_2 = 20666,88$; $\nu_3 = 22275,09$ ergibt sich $25679,65$, während der entsprechende Wert der ersten Nebenserien $25672,15$ war.

Diese Übereinstimmung ist eine so gute, daß man die Grenzen aus der ersten Nebenserien übernehmen kann. Die Serienkonstanten sind dann:

$$\begin{aligned}s_1 &= + 0,185299, & \sigma_1 &= - 6,2129 \cdot 10^{-7}, \\ s_2 &= + 0,206969, & \sigma_2 &= - 9,1117 \cdot 10^{-7}.\end{aligned}$$

Von den im Ultrarot verlaufenden berechneten Gliedern ($m = 2,5$) konnte leider bis jetzt nichts erhalten werden. Die Linien $G_1 - 2,5 s$ sollen noch photographisch nachgewiesen und der Nachweis der weiter im Ultrarot liegenden, vermutlich starken Linien noch mit Bolometer oder Thermosäule demnächst versucht werden, da er wichtig genug erscheint.

Bei der Serie S_1 scheint alles in Ordnung zu sein. Die Abweichung des berechneten Wertes vom beobachteten spricht nicht gegen die Richtigkeit der Zuordnung des ersten Gliedes. Der identische Bau, entsprechende Intensitäten und umgekehrte Lagerung sind vielmehr Argumente dafür.

Anders ist es bei Serie S_2 . Hier fällt insbesondere das Fehlen der höheren Glieder von $G_8 - m s_2$ auf, während die Glieder $G_6 - m s_2$ beobachtet sind, obgleich das Grundglied weniger stark ist. (Die Intensität der Linie $16312,88$ ($\lambda = 6128,45$) ist allerdings etwas höher anzusetzen!)

Die Linie $G_7 - 3,5 s_1$ müßte da sein; ihre Wellenlänge berechnet sich mit dem Mittelwerte $3,5 s_1 = 8101,64$ zu ($\nu = 14969,79$) $\lambda = 6678,28$. Diese Linie liegt also in unmittelbarer Nähe der starken Linie $6678,275$; ob die schwache Linie nach großen oder kleinen Wellenlängen liegt, läßt sich aber aus den Messungen Watsons nicht voraussagen. Mit dem Etalon ließ sich die schwächere Linie bis jetzt nicht auffinden.

Konsequenterweise müßte man annehmen, daß auch die zwei übrigen Gruppen der Tab. II Grundglieder von zwei zweiten Nebenserien sind, die nach derselben Grenze konvergieren wie S_1 und S_2 . (Vgl. nachstehende Hauptserien!) Berechnungen, die in dieser Richtung angestellt wurden, führten zu keinem endgültigen Ergebnis.

Die *Hauptserien*, die den Serien S_1 und S_2 entsprechen, haben, wenn auch hier die Rydberg-Schustersche Regel gilt, die Grenzen 1,5 s; also:

$$\begin{aligned} 1,5 s_1 &= 39888,11, \\ 1,5 s_2 &= 39470,66 \end{aligned}$$

und, falls die beiden übrigen eben erwähnten Gruppen der Tabelle ebenfalls Grundglieder sind,

$$\begin{aligned} 1,5 s_3 &= 39111,31, \\ 1,5 s_4 &= 38041,23. \end{aligned}$$

Verschiedene dieser Serien konnten bis jetzt ermittelt werden. In den folgenden Schemen sind Serien zusammengestellt, die die Grenze 39888,11 haben. Durch Kombination ihrer Terme mit den übrigen drei Grenzen (39470,55 usw.) ergeben sich die entsprechenden Glieder der Tab. Ia.

Leider sind die vorliegenden Messungen Watsons, wie die von Rossi, wohl unvollständig; denn trotz des starken Intensitätsabfalles, den man bei der Hauptserie oft beobachtet, müßten höhere Glieder noch beobachtet werden können. Experimente in dieser Richtung werden manches zur Sicherstellung dieser Serien beitragen. Mir selbst war es bisher unmöglich, Neon oder eine Quarzröhre mit Neon zu erhalten, um die höheren Glieder auffinden zu können.

Serie P_1 .

Grenze 39888,11. Konstanten: $p_1 = 0,133357$. $\pi_1 = -2,8492 \cdot 10^{-6}$.

m	2	3	4	5
$\lambda_{\text{beob.}}$	(8) 7032,41	(4) 3510,72	(3) 2992,45	
$\nu_{\text{Vak.}}$	14215,96	28475,99	33407,61	
$m p_{\text{beob.}}$	25672,15	11412,12	6480,50	
$m p_{\text{ber.}}$	25866,33			
$\lambda_{\text{ber.}}$	7131,75	3510,72*	2992,45*	

Serie P_2 .Grenze 39888,11. $p_2 = 0,157767$. $\pi = - 1,2144 \cdot 10^{-6}$.

m	2	3	4	5
λ beob.	(10) 6402,25	(6) 3472,53	(3) 2982,69	(1) 2795,96
ν Vak.	15615,20	28789,24	33516,89	35755,28
mp beob.	24272,90	11098,87	6371,22	4132,83
mp ber.	24341,54	11098,91	6371,22	4132,83
λ ber.	6430,52	3472,54	2982,69*	2795,96*

Serie P_3 .Grenze 39888,11. $p_3 = 0,168682$. $\pi_3 = - 1,3299 \cdot 10^{-6}$.

m	2	3	4	5
λ beob.	(9) 6334,43	(4) 3464,31	(2) 2979,82	(0) 2794,62
ν Vak.	15782,39	28857,52	33548,15	35777,42
mp beob.	24105,72	11030,59	6339,96	4115,69
mp ber.	24034,28	11030,59	6339,96	4116,10
λ ber.	6305,01	3464,31*	2979,82*	2794,65

Serie P_4 .Grenze 39888,11. $p_4 = 0,185022$. $\pi = - 1,3421 \cdot 10^{-6}$.

m	2	3	4	(5)
λ beob.	(8) 6217,28	(4) 3450,73	(1) 2975,53	
ν Vak.	16079,76	28971,06	33597,63	
mp beob.	23808,35	10917,05	6290,48	
mp ber.	23666,41	10917,05	6290,48	4090,19
λ ber.	6162,88	3450,73*	2975,53*	2792,63

Serie P_5 .Grenze 39888,11. $p_5 = 0,186896$. $\pi = - 1,1761 \cdot 10^{-6}$.

m	2	3	4	5
λ beob.	(10) 6143,06	(5) 3447,69	(3) 2974,77	(1) 2792,29
ν Vak.	16274,03	28996,60	33606,44	35802,26
mp beob.	23614,08	10891,51	6281,67	4086,85
mp ber.	23536,07	10891,51	6281,67	4086,16
λ ber.	6113,76	3447,69*	2974,77*	2792,31

§ 18. Außer den in § 12 aufgeführten Seriengruppen wurden noch eine Reihe anderer aufgefunden, die zwar gleiche Schwingungsdifferenzen haben, aber nach anderer Grenzen konvergieren.

Die Ritzsche Formel stellt diese Serien nicht besonders gut dar; vielleicht ist das Zahlenmaterial hier ungenauer, da viele dieser Linien sehr nahe bei anderen liegen. Außerdem sind nicht viele Glieder beobachtet. Aus diesen Gründen ist eine genaue Angabe der Rechnungsergebnisse hier unterlassen worden und sind nur die zusammengehörigen Gruppen zusammengestellt.

Die Serien scheinen gemeinsame Grenzen zu haben. Für die Linien 1 berechnet sich aus den Gliedern mit der Seriennummer 4, 5, 6 (bzw. 3,5, 4,5, 5,5) die Grenze:

a) 26448,8,	d) 26448,6,
b) 26449,4,	e) 26447,5,
c) 26442,5,	f) 26447,1.

Die Serien a—d haben den Charakter einer ersten, e und f den einer zweiten Nebenserie.

a) Grenze für die Linien 1. 26448,8.

<i>m</i>	3	4	5	6	7
1.					
2.					
3.					
4.	(7) 12287,03	(4) 17673,59	(3) 20167,88	(3) 21520,60	(0) 22337,08?
5.	(1) 12092,78				
6.	(6) 11636,53	(5) 17022,96	(4) 19517,34	(2) 20870,20	(1) 21686,42?
7.	(1) 11550,14				
8.		(1) 16756,40			

b) Grenze für die Linien 1. 26449,4.

<i>m</i>	3	4	5	6	7
1.					
2.	(2) 12753,25				
3.	(8) 12585,93	(4) 17971,97	(3) 20465,68	(1) 21818,44	
4.					
5.	(5) 12094,29	(5) 17480,35	(2) 19974,07	(1) 21326,87	
6.					
7.	(6) 11551,67	(5) 16937,50	(5) 19431,36	(3) 20784,06	(2) 21600,09
8.					

c) Grenze für die Linien I. 26442,5.

<i>m</i>	3	4	5	6	7
1.	(4) 14162,17	(6) 19539,34	(4) 22031,14	(2) 23381,86	(0) 24200,95
2.	(2) 12762,79				
3.	(3) 12595,74				
4.	(3) 12298,34	(2) 17675,62			
5.	(4) 12104,10				
6.	(1) 11647,93	(4) 17025,13	(4) 19517,34		
7.	(2) 11561,49				
8.	(4) 11381,50	(3) 16758,64	(4) 19250,76	(2) 20601,65	(0) 21419,25

d) Grenze für die Linien I. 26443,6.

<i>m</i>	3	4	5	6	7
1.	(4) 14177,85	(3) 19550,19	(3) 22038,23	(1) 23386,78	(0) 24200,95
2.					
3.	(4) 12611,50				
4.	(5) 12314,08	(2) 17686,47	(0) 20174,47		
5.	(1) 12119,64				
6.	(2) 11863,68	(3) 17035,80	(0) 19523,78		
7.	ber. 11577,28 ¹⁾	(1) 16949,47			
8.	(2) 11307,24	(2) 16769,29	(2) 19257,77		
9.		(2) 14837,26	(0) 17325,56		

e) Grenze der Linien I. 26447,5.

<i>m</i>	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
1.			(4) 18398,99	(4) 24469,87	(2) 23066,14
2.			(2) 16832,44	(0) 19903,33	(1) 21499,87
3.			(3) 16535,04		
4.			(4) 16340,70	(0) 19411,69	(1) 21008,45
5.			(5) 15884,33	(0) 18955,44	
6.			(6) 15797,96	(4) 18869,24	(4) 20465,68
7.			(6) 15618,17	(1) 18689,28	
8.			(3) 13685,89		

f) Grenze der Linien I. 26447,1.

<i>m</i>	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5
1.			(2) 18348,83	(2) 21448,23	(0) 23054,70
2.					
3.					
4.			(3) 16484,87		(0) 21191,33
5.					
6.			(5) 15834,35	(1) 18933,84	
7.					
8.			(2) 15567,96		

1) Nicht beobachtet! Müßte nahe bei der Linie 8634,67 liegen.

Inwiefern diese Serien mit den früheren zusammenhängen, konnte bis jetzt nicht ermittelt werden.

Die Arbeit wurde ausgeführt mit Mitteln, die die Stiftung für wissenschaftliche Forschung an der Universität Zürich in zuvorkommender Weise dem Physikalischen Institut der Universität zur Verfügung gestellt hat. Auch mir ist es eine angenehme Pflicht, dem Kuratorium der Stiftung meinen innigsten Dank für diese Unterstützung auszusprechen.

Hrn. Prof. Edgar Meyer möchte ich auch an dieser Stelle herzlich für die Liebenswürdigkeit danken, mit der er allen meinen Wünschen entgegenkam.

Zürich, September 1918.
Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 26. September 1918.)

3. Über die lineare Differentialgleichung für
gekoppelte elektrische Schwingungen und die
Wurzeln der Gleichung vierten Grades;
von J. Sommer.

Die Integration der linearen Differentialgleichung

$$a_0 \varphi'''' + a_1 \varphi''' + a_2 \varphi'' + a_3 \varphi' + a_4 \varphi = \psi(t),$$

welche exakt die kleinen Schwingungen und in erster Näherung jede Art einfacher gekoppelter Schwingungen darstellt, erfordert die Auflösung ihrer charakteristischen oder determinierenden Gleichung

$$f(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0.$$

Man will nun aber gerne die im allgemeinen umständliche, exakte Berechnung der Wurzeln dieser Gleichung vermeiden, besonders wenn es sich zunächst bloß um die qualitative Beschreibung des Schwingungsvorganges handelt. Hierzu ist es ausreichend zu wissen, wie die Wurzeln der charakteristischen Gleichung hinsichtlich ihrer Realität und des Vorzeichens ihrer reellen Teile beschaffen sind, wozu man nur gewisse rationale Funktionen der Koeffizienten zu kennen braucht.

Die Frage nach der Gesamtzahl der reellen Wurzeln bzw. nach der Anzahl der reellen Wurzeln, welche innerhalb eines bestimmten Intervales liegen, ist sogar für Gleichungen beliebigen Grades durch den Lehrsatz von J. K. Fr. Sturm in der Theorie vollständig lösbar und ist speziell für Gleichungen vierten Grades noch leicht zu beantworten. Nach Sturm hat Ch. Hermite neue Hilfsmittel zur Beantwortung dieser Frage nach der Anzahl reeller Wurzeln angegeben, wobei er von den Eigenschaften quadratischer Formen mit n veränderlichen Gebrauch mache. Ausgehend von diesem gleichen Gedanken, hat ferner Hr. A. Hurwitz¹⁾ die

1) A. Hurwitz, Math. Annal. 46, p. 273 f. Leipzig 1895.

Bedingungen aufgestellt, unter welchen eine Gleichung n ten Grades nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt. Hr. Hurwitz löste die hiermit gestellte Aufgabe in elegantester Weise unter Verwendung des Cauchyschen Residuensatzes, also mit den Hilfsmitteln der höheren Analysis.

Wenn es danach auch nicht mehr schwer ist, alle Bedingungen aufzustellen, durch welche sich die Wurzeln einer Gleichung vierten Grades, nach Realität und des Vorzeichens ihres reellen Teiles, vollkommen charakterisieren lassen, so glaubte ich doch, dem Physiker und Techniker einen Dienst zu erweisen mit einer Zusammenstellung dieser Bedingungen und ihrer elementaren Ableitung. So ist aus solchem Wunsche, der mir persönlich schon oft entgegentrat, die nachfolgende Zusammenstellung entstanden.

Eine solche Zusammenstellung ist insbesondere dann notwendig, wenn es gilt, die Konstanten zu ermitteln, für welche zum voraus bestimmte Schwingungstypen sich ergeben, oder wenn, anders ausgedrückt, die Beschaffenheit der Wurzeln der charakteristischen Gleichung vorgeschrieben ist.

In einem letzten Paragraphen habe ich dann die Anwendung dieser Bedingungen auf die Integration der verkürzten Differentialgleichung ohne zweites Glied

$$a_0 \varphi'''' + a_1 \varphi''' + a_2 \varphi'' + a_3 \varphi'_3 + a_4 \varphi = 0$$

gemacht, indem ich in einigen Bildern die wichtigsten Kurventypen zeichnete, welche durch die Differentialgleichung dargestellt sind, oder indem ich wenigstens angab, wie diese Bilder leicht zu zeichnen sind.

§ 1. Realitätsbedingungen für die Wurzeln der Gleichung vierten Grades.

Im folgenden sollen stets a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 reelle, gegebene Zahlenkoeffizienten bezeichnen, und insbesonders soll a_0 durchgehends eine positive Größe bedeuten $a_0 > 0$, indem dies keinerlei Beschränkung der Allgemeinheit ist.

Nun sei

$$(1) \quad f(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$$

und

$$f_1(x) = f'(x) = 4 a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 2 a_2 x + a_3,$$

dann dividiere man $f(x)$ durch $f_1(x)$, nenne den Quotienten $q_1(x)$ und den Rest, nachdem man vorher darin die Vorzeichen sämtlicher Koeffizienten in das entgegengesetzte Vorzeichen umgewandelt hat, $f_2(x)$, so daß

$$f(x) = q_1(x) f_1(x) - f_2(x)$$

wird, und setze dieses Divisionsverfahren so lange fort

$$f_1(x) = q_2(x) f_2(x) - f_3(x)$$

$$f_2(x) = q_3(x) f_3(x) - f_4,$$

bis man auf einen von x unabhängigen konstanten Rest f_4 kommt; alsdann bilden die Funktionen

$$(2) \quad f(x), \quad f_1(x), \quad f_2(x), \quad f_3(x), \quad f_4$$

eine Sturmsche Kette und der Satz von Sturm, auf dem unsere Entwicklungen aufgebaut sind, lautet folgendermaßen:

Die Gleichung $f(x) = 0$ besitzt so viele reelle Wurzeln in dem Intervall zwischen zwei reellen Zahlen x_1 und $x_2 > x_1$, als der Überschuss der Anzahl der Zeichenwechsel in der Sturmschen Kette (2) für $x = x_1$ über die Anzahl der Zeichenwechsel dieser Kette für $x = x_2$ beträgt.

Das oben beschriebene Divisionsverfahren ist für die bi-quadratische Funktion $f(x)$ noch leicht ausführbar und liefert außer $f(x)$ und $f_1(x)$ noch die Funktionen der Kette (2):

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_2(x) = \frac{-1}{16a_0} \{ (8a_0a_3 - 3a_1^2)x^2 + (12a_0a_3 - 2a_1a_3)x \\ \quad + (16a_0a_4 - a_1a_3) \} \\ \quad = \frac{-1}{16a_0} \{ b_0x^2 + b_1x + b_2 \}, \\ \\ f_3(x) = -\frac{16a_0}{b_0^2} \{ (-2a_1^2a_3^2 + 6a_1^3 - 28a_0a_1a_2a_3 + 12a_0a_1^2a_4 \\ \quad + 8a_0a_2^3 - 32a_0^2a_2a_4 + 36a_0^2a_3^2)x + (-a_1^2a_2a_3 \\ \quad + 9a_1^3a_4 - 32a_0a_1a_2a_4 - 3a_0a_1a_3^3 + 4a_0a_2^3a_3 \\ \quad + 48a_0^2a_3a_4) \} \\ \quad = -\frac{1}{b_0^2} \{ c_0x + c_1 \} = -\frac{1}{b_0^2} \{ (b_0(2a_3b_0 - 3a_1b_1) \\ \quad - 4a_0(b_0b_1 - b_1^2))x + b_0(a_3b_0 - 3a_1b_3) + 4a_0b_1b_3 \}, \\ \\ f_4 = \frac{16a_0b_0^2}{27c_0^2} [4(a_3^2 - 3a_1a_3 + 12a_0a_4)^2 - (27a_1^2a_4 \\ \quad + 27a_0a_3^2 + 2a_2^3 - 72a_0a_2a_4 - 9a_1a_2a_3)^2] \\ \quad = \frac{1}{16a_0c_0^2} [b_0c_1^2 - b_1c_0c_1 + b_3c_0^2]. \end{array} \right.$$

Die letzte Größe ist also eine Konstante, nämlich eine ganze rationale Funktion der Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 , und unterscheidet sich von der *Discriminante D* der Funktion $f(x)$ nur um einen konstanten, außerwesentlichen Faktor. Der Gleichförmigkeit halber will ich auch an Stelle und zu den vorübergehend eingeführten Bezeichnungen b_0, c_0 noch D_0 und D_1 schreiben, so daß hinfert gelten soll:

$$(3a) \quad D_1 = 8 a_0 a_2 - 3 a_1^2,$$

$$(4a) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_2 = -2 a_1^2 a_2^2 + 6 a_1^3 a_3 - 28 a_0 a_1 a_2 a_3 + 12 a_0 a_1^2 a_4 \\ \quad + 8 a_0 a_2^3 - 32 a_0^2 a_2 a_4 + 96 a_0^2 a_3^2, \end{array} \right.$$

$$(5a) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_3 = 27 D = 4(a_2^2 - 3 a_1 a_3 + 12 a_0 a_4)^3 - (27 a_1^2 a_4 \\ \quad + 27 a_0 a_3^2 + 2 a_2^3 - 72 a_0 a_2 a_4 - 9 a_1 a_2 a_3)^2. \end{array} \right.$$

Falls etwa schon $D_1 = 0$ ausfällt, so ist die oben angegebene Sturmsche Kette durch eine einfachere zu ersetzen, worauf wir unten zurückkommen. Zuerst sei $D_1 \neq 0$ vorausgesetzt.

Ist nun zunächst $D_3 = 0$, d. h. verschwindet die Discriminante der Funktion $f(x)$, so hat die Gleichung $f(x) = 0$ mehrfache Wurzeln, mindestens aber eine Doppelwurzel, und diese mehrfachen Wurzeln lassen sich bequem bestimmen. Es ist nämlich jeder m -fache Wurzelfaktor $(x - w)^m$ von $f(x)$ ein $(m - 1)$ -facher Faktor von $f_1(x)$ und daher erhält man alle mehrfachen Wurzeln, indem man den größten gemeinsamen Teiler der Funktionen $f(x)$ und $f_1(x)$ berechnet mit Hilfe des bereits beschriebenen Divisionsverfahrens. Dieser Teiler stimmt eben bis auf einen Zahlenfaktor mit einer der Funktionen in der Sturmschen Kette überein. Nach Absonderung dieses Teilers aus $f(x)$ sind dann die Wurzeln von $f(x) = 0$ ohne weiteres zu bestimmen, indem keine höheren Gleichungen als solche zweiten Grades aufzulösen sind.

Ist $D \neq 0$, so hat $f(x) = 0$ nur einfache Wurzeln, und wir können dann den Satz von Sturm anwenden auf ein Intervall, in dem die sämtlichen reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ liegen. Da nun für hinreichend große absolute Beträge von x die Vorzeichen der Funktionen $f(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ mit den Vorzeichen der Glieder ihrer höchsten Potenzen übereinstimmen, so setze man in verständlicher, abgekürzter Redeweise in der Sturmschen Kette die Werte $x_2 = +\infty$ und $x_1 = -\infty$, dann folgt, daß die Gleichung

$f(x) = 0$ so viele reelle verschiedene Wurzeln besitzt als der Überschuß der Anzahl der Vorzeichenwechsel in der zweiten der nachstehenden Reihen über die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der ersten Reihe

$$(6) \quad + a_0, + a_0, - D_1, - D_2, D_3,$$

$$(6a) \quad + a_0, - a_0, - D_1, + D_2, D_3$$

beträgt, wo nun auch D statt D_3 gesetzt werden kann.

Die Größen D_1, D_2, D können positiv oder negativ sein, und je nach den verschiedenen Möglichkeiten erhält man für die Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ folgende Fälle:

(I) $D < 0$: zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln;

(IIa) $D > 0, D_1 > 0$: alle Wurzeln imaginär;

(IIb) $D > 0, D_1 < 0, D_2 > 0$: alle Wurzeln imaginär;

(IIc) $D > 0, D_1 < 0, D_2 < 0$: alle vier Wurzeln reell.¹⁾

Es ist hier der Ausdruck imaginär in dem allgemeineren Sinne — rein imaginär und komplex umfassend — zu verstehen, und natürlich treten diese imaginären Wurzeln paarweise konjugiert auf.

Die angeführten Bedingungen in den vier Fällen sind von einander unabhängig; denn zu jedem Falle lassen sich unschwer Beispiele konstruieren. Ferner folgt aus dem Sturmischen Satz u. a., daß nicht gleichzeitig $D < 0, D_1 > 0, D_2 < 0$ sein kann.

Ganz leicht erledigt sich der Ausnahmefall, in dem $D_1 = 0$ ausfällt. Dann wird die Sturmsche Kette aus den Funktionen gebildet:

$$f(x); f_1(x); f_2(x) = -\frac{1}{16a_0} \{b_1x + b_2\}; f_3 = \frac{64a_0}{b_1^2} D,$$

und für die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ hat man:

(I') $D < 0$: zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln,

(II') $D > 0$: alle Wurzeln imaginär.

1) Man vgl. z. B. H. Weber, Lehrbuch der Algebra, 1. 2. Aufl. p. 276 u. 297, Braunschweig 1898, wo die Bedingungen für den Fall $a_1 = 0$ angegeben sind.

Es fällt auf, daß die Gleichung $f(x) = 0$ stets imaginäre Wurzeln besitzen muß, wenn $D_1 = 0$ ist. Das ist auch verständlich, wenn man D_1 durch die vier Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 dieser Gleichung ausdrückt:

$$D_1 = -a_0^2 \{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + (x_3 - x_4)^2\}.$$

Hier nach kann dieser Ausdruck nicht verschwinden, wenn alle Wurzeln reell sind, mit Ausnahme des hier ausgeschiedenen Falles, in dem $D = 0, x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ ist.

Falls endlich $D_2 = 0$ wird, $D_1 \neq 0$, so ist mit $D_1 > 0$ auch $D > 0$ und mit $D_1 < 0$ zugleich $D < 0$, so daß man für $D > 0$ wieder lauter imaginäre Wurzeln und für $D < 0$ zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln erhält.

§ 2. Die Vorzeichenbestimmung der Wurzeln.

Nach der Aufstellung der Bedingungen für die Realität der Wurzeln wollen wir nun diejenigen weiteren Bedingungen ermitteln, unter welchen die reellen Teile der Wurzeln entweder positiv oder negativ sind.

Hat $f(x) = 0$ zunächst rein imaginäre, von Null verschiedene Wurzeln $x = iw$, so ist

$$f(iw) = a_0 w^4 - a_2 w^2 + a_4 - i(a_1 w^3 - a_3 w) = 0,$$

weshalb gleichzeitig die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0 w^4 - a_2 w^2 + a_4 &= 0 \\ a_1 w^3 - a_3 w &= 0 \end{aligned}$$

für ein reelles w erfüllt sein müssen. Das ist nur möglich, wenn

$$\Delta = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 = 0$$

wird. Diese Bedingung ist notwendig und ist durch einige naheliegende weitere Bedingungen über a_1, a_3 und a_0, a_2, a_4 zu einer hinreichenden Bedingung zu ergänzen. Wir können diesen Fall als erledigt ansehen.

Die weitere Diskussion ist besonders einfach, wenn alle Wurzeln reell sind, indem dann allein schon die Descartes'sche Zeichenregel eine Entscheidung über die Anzahl positiver und negativer Wurzeln liefert. Diese Regel lautet:

Vermindert man die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe der aufeinanderfolgenden Koeffizienten der Funktion $f(x)$

— bzw. $f(-x)$ — um die Anzahl der reellen positiven — bzw. negativen — Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, so ist die Differenz Null, oder eine gerade ganze Zahl.

Um aber im Falle komplexer Wurzeln auch das Vorzeichen der reellen Teile bestimmen zu können, brauchen wir außerdem noch eine Funktion der Wurzeln von $f(x) = 0$, in welcher diese reellen Teile selbständige auftreten. Sind x_1, x_2, x_3, x_4 die vier Wurzeln, so leistet dies die symmetrische Funktion:

(1) $\Pi = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)(x_3 + x_4)$, welche sich rational und ganz durch die Koeffizienten der Funktion $f(x)$ ausdrücken lässt, indem die Umrechnung ergibt:

$$(2) \quad \Pi = \frac{1}{a_0^3} (a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2) = \frac{\Delta}{a_0^3}.$$

Da $a_0 > 0$ vorausgesetzt ist, so hat Π immer gleiches Vorzeichen mit ihrem wesentlichen Faktor

$$(3) \quad \Delta = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2.$$

Wenn $f(x) = 0$ zwei reelle Wurzeln, etwa x_1 und x_2 , und ferner zwei komplexe Wurzeln hat, welche mit

$$x_3, x_4 = \varrho \pm i\sigma$$

bezeichnet werden mögen, so ist das Teilprodukt aus Π

$$(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4) = [(x_1 + \varrho)^2 + \sigma^2] \\ [(x_2 + \varrho)^2 + \sigma^2] = k^2 > 0$$

reell und positiv, ferner

$$x_3 + x_4 = 2\varrho \quad \text{und} \quad x_1 + x_2$$

reell, also

$$(4) \quad \Pi = 2k^2(x_1 + x_2)\varrho.$$

Neben diesem Ausdrucke, dessen Vorzeichen nur von dem von $x_1 + x_2$ und ϱ abhängt, hat man dann noch zur Verfügung:

$$(5) \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = (x_1 + x_3) + 2\varrho = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$(6) \quad x_1 x_2 x_3 x_4 = (x_1 x_2)(\varrho^2 + \sigma^2) = \frac{a_4}{a_0},$$

wonach, wegen $\varrho^2 + \sigma^2 > 0$, das Vorzeichen des Produktes in der letzten Gleichung nur von x_1 und x_2 abhängt.

Diese Beziehungen gestatten in mehreren Fällen schon die eindeutige Bestimmung der Vorzeichen von x_1 , x_2 , ϱ , oder liefern umgekehrt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für bestimmte Vorzeichen. Sind aber die Produkte $x_1 x_2$ und $(x_1 + x_2) \varrho$ zugleich negativ, so würde aus

$$(x_1 + x_2) + 2\varrho = -\frac{a_1}{a_0}$$

das Vorzeichen von ϱ noch nicht bestimmt sein; dann haben aber wieder

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

und ϱ gleiches Vorzeichen und man gelangt zu einer Entscheidung über das Vorzeichen von ϱ , indem man zu der Gleichung für die reziproken Wurzeln übergeht. In der Tat, setzt man $x = \frac{1}{\xi}$, so hat die Gleichung:

$$F(\xi) = \xi^4 f\left(\frac{1}{\xi}\right) = a_4 \xi^4 + a_3 \xi^3 + a_2 \xi^2 + a_1 \xi + a_0 = 0$$

die Wurzeln:

$$\xi_1 = \frac{1}{x_1}, \quad \xi_2 = \frac{1}{x_2}, \quad \xi_3, \quad \xi_4 = \frac{\varrho \mp i\sigma}{\varrho^2 + \sigma^2}$$

und es wird:

$$(7) \quad \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right) + \frac{2\varrho}{\varrho^2 + \sigma^2} = -\frac{a_2}{a_4},$$

welche Gleichung an Stelle der Gleichung

$$(x_1 + x_2) + 2\varrho = -\frac{a_1}{a_0}$$

tritt.

Natürlich könnte diese Gleichung auch in den anderen Fällen benutzt werden, oder wenigstens zur Aufstellung von Bedingungen führen, welche Folgerungen aus den übrigen sind und diese teilweise ersetzen können.

Sind endlich alle Wurzeln von $f(x) = 0$ komplex,

$$x_1, x_2 = \varrho_1 \pm i\sigma_1, \quad x_3, x_4 = \varrho_2 \pm i\sigma_2,$$

dann wird wieder:

$$(x_1 + x_2)(x_2 + x_4)(x_2 + x_3)(x_1 + x_4) = [(a_1 + a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2] \\ [(a_1 + a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2] = x^2$$

reell und positiv und:

$$(8) \quad \Pi = 4\pi^2 \cdot \varrho_1 \varrho_2.$$

Danach lassen sich die Vorzeichen der reellen Teile ϱ_1, ϱ_2 aus dem Vorzeichen von Π oder Δ sowie aus der Beziehung:

$$(9) \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\varrho_1 + 2\varrho_2$$

bestimmen.

Die Ergebnisse der eingehenden Diskussion fassen wir in drei Tabellen zusammen.

I. $a_0 > 0, D < 0$: zwei reelle und ein Paar komplexer Wurzeln.

Anzahl der reellen Wurzeln		Komplexe Wurzeln		Δ	Spezielle Bedingungen in den Koeffizienten
positive	negative	Reellteil positiv	Reellteil negativ		
0	2	0	1	> 0	$a_1 > 0, a_4 > 0 [a_3 > 0]$
2	0	1	0	> 0	$a_1 < 0, a_4 > 0 [a_3 < 0]$
{ 2	0	0	1	< 0	$a_4 > 0^1)$
{ 0	2	1	0		
1	1	0	1	{ > 0	$a_1 > 0, a_4 < 0$
				{ < 0	$a_4 < 0, a_2 < 0$
1	1	1	0	{ > 0	$a_1 < 0, a_4 < 0$
				{ < 0	$a_4 < 0, a_3 > 0$

Die wenigen eingeklammerten Bedingungen sind Folgen der übrigen.

IIa. $a_0 > 0, D > 0, D_1 > 0$ } zwei Paare kom-

IIb. $a_0 > 0, D > 0, D_1 < 0, D_2 > 0$ } plexer Wurzeln.

Komplexe Wurzeln		Δ	Spezielle Bedingungen in den Koeffizienten
Reellteil pos.	Reellteil neg.		
1	1	< 0	keine
0	2	> 0	$a_1 > 0 [a_4 > 0, a_3 > 0]$
2	0	> 0	$a_1 < 0 [a_4 > 0, a_3 < 0]$

1) Die weitere Scheidung dieser Fälle, entweder an der speziellen Gleichung oder, etwas umständlicher, allgemein auf Grund des Sturmischen Satzes, kann hier übergangen werden.

IIIc. $a_0 > 0, D > 0, D_1 < 0, D_2 < 0$: alle Wurzeln reell.

Anzahl der Wurzeln		Spezielle Bedingungen in den Koeffizienten
positive	negative	
4	0	$a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 < 0, a_4 > 0 [D > 0]$
0	4	$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0 [D > 0]$
2	2	{ entweder $a_1 a_3 < 0, a_2 > 0, a_4 > 0$ oder $a_3 < 0, a_4 > 0$
3	1	{ entweder $a_1 < 0, a_2 a_3 < 0, a_4 < 0$ oder $a_1 a_3 < 0, a_3 > 0, a_4 < 0$
1	3	{ entweder $a_1 > 0, a_2 a_3 > 0, a_4 < 0$ oder $a_1 a_2 > 0, a_3 < 0, a_4 < 0$

Natürlich ist es möglich, hieraus die Bedingungen auch nach anderen Gesichtspunkten geordnet zusammenzufassen. Frägt man z. B. nach den Bedingungen, unter welchen die Gleichung vierten Grades nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt, so erhält man als gemeinsamen Bestandteil der Fälle mit reellen und komplexen Wurzeln, in denen jene Forderung erfüllt ist, die Bedingungen:

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \quad D > 0,$$

oder weil $D = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1^2 a_4$ bei positivem a_3 und a_4 nur dann auch positiv ausfällt, wenn $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$, so erhält man die von Hrn. Hurwitz¹⁾ als notwendig und hinreichend aufgestellten Bedingungen:

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad a_4 > 0.$$

Wie man sieht, gründet sich die Diskussion wesentlich auf die Werte der Größen D_1, D_2, D und D . Die Berechnung dieser Größen ist aber nicht mühsam und braucht nur so weit geführt zu werden, als die Ermittlung der Vorzeichen es erfordert.

Die Ausdehnung der elementaren Methoden auf Gleichungen höheren Grades und die Anwendung des Sturmischen Satzes nach unserer Fassung wäre dagegen mit großen praktischen Schwierigkeiten verknüpft, da die Rechnungen zu umfangreich werden.

1) A. Hurwitz, l. o. p. 275.

§ 8. Das Integral der Schwingungsgleichung.

Indem wir nun zu der geometrischen Darstellung des reellen allgemeinen Integrals der verkürzten linearen Differentialgleichung vierter Ordnung übergehen, wollen wir wie üblich

$$y' = \frac{dy}{dx} \text{ usw.}$$

setzen und die Differentialgleichung schreiben:

$$(1) \quad a_0 y'''' + a_1 y''' + a_2 y'' + a_3 y' + a_4 y = 0.$$

Macht man dann für das Integral den Ansatz $y = e^{rx}$, dann lautet die charakteristische Gleichung:

$$(2) \quad a_0 r^4 + a_1 r^3 + a_2 r^2 + a_3 r + a_4 = 0,$$

mit den Wurzeln r_1, r_2, r_3, r_4 , so daß das allgemeine Integral jetzt die Form hat:

$$(3) \quad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + C_4 e^{r_4 x}.$$

Physikalisch sind die Fälle ausgezeichnet, wo x, y gleichzeitig reelle stetige Veränderliche sind, in denen also die Gleichung (3) reelle ebene Kurven darstellt. Von der unendlichen Mannigfaltigkeit dieser Kurven kann man sich eine Vorstellung verschaffen, indem man zur Vereinfachung alle Typen zu einer Klasse vereinigt, welche durch Spiegelung an der x - oder y -Achse ineinander übergehen.

Die Gleichung (3) läßt sich auch für komplexe Wurzeln der charakteristischen Gleichung und passende Werte der Konstanten C in reeller Form darstellen, da man

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

setzen kann. Schreibt man die Wurzeln der Gleichung (2) r_1, r_2, r_3, r_4 , wenn alle vier reell sind, ferner

$$r_1, r_2, r_3 | r_4 = x + i \lambda,$$

wenn zwei paarweise komplex sind, endlich $r_1, r_2 = x' + i \lambda', r_3, r_4 = x'' + i \lambda''$, wenn alle Wurzeln komplex sind, so treten an die Stelle der alle Fälle umfassenden Gleichung (3) die folgenden Gleichungen in reeller Form:

$$(3') \quad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + C_4 e^{r_4 x},$$

$$(4) \quad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C e^{rx} \sin(\lambda x + \varphi),$$

$$(5) \quad y = C_1 e^{x'} \sin(\lambda' x + \varphi) + C_2 e^{x''} \sin(\lambda'' x + \varphi'),$$

worin $C_1, C_2, C_3, C_4, C, \varphi, \varphi', \varphi''$ reelle Integrationskonstante bedeuten.

Für die graphische Darstellung ist es praktisch, y als Summe von Aggregaten der Formen

$$(6) \quad y_1 = c' e^{r' x} + c'' e^{r'' x}$$

oder

$$(7) \quad y_2 = c e^{nx} \sin(\lambda x + \varphi)$$

aufzufassen, damit sich y als Summe von nur noch zwei Kurven mit den Gleichungen (6) bzw. (7) ergibt.

Es entspricht dies der Auffassung, daß y als Lösung einer Differentialgleichung für die *erzwungene Schwingung*

$$A_0 y'' + A_1 y' + A_2 y = F(x)$$

angesehen werden kann, worin $F(x)$ die spezielle Form besitzt: $c_1 e^{w_1 x} + c_2 e^{w_2 x}$, mit reellen oder komplexen Werten w_1, w_2 . Diese Auffassung hat auch einen naheliegenden physikalischen Sinn.

Die Gleichung $y_1 = c' e^{r' x} + c'' e^{r'' x}$ liefert nur drei, wesentlich verschiedene, reelle Kurventypen. Entweder erinnert die

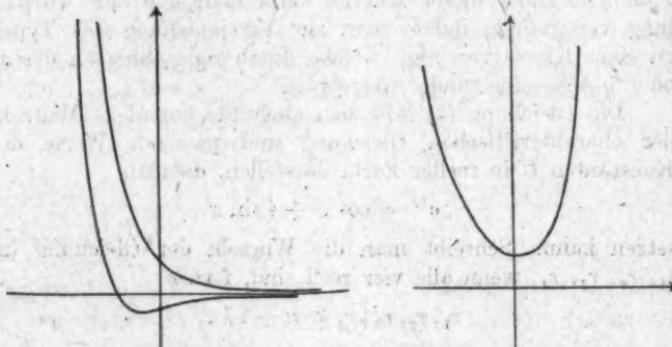


Fig. 1.

Fig. 2.

durch diese Gleichung dargestellte Kurve an die einfache Exponentiallinie, eventuell mit einer in ihrem Zuge eingelegten einfachen Schwingung (vgl. Fig. 1), oder an die Kettenlinie (vgl. Fig. 2), oder endlich an die Tangenslinie (vgl. Fig. 3).

Die mit den Werten und Vorzeichen von c' und c'' veränderliche Orientierung und Lage dieser Kurven im Koordinatensystem kann für ihre Form außer acht gelassen werden.

Ferner liefert die zweite Gleichung $y_2 = c \cdot e^{rx} \sin(\lambda x + \varphi)$ als reelle Kurven:
a) für $x = 0$ die Sinuslinie, b) für $x < 0$ das Bild der gedämpften Schwingung, wie es Fig. 4 zeigt, und c) für $x > 0$ eine Kurve, welche aus Fig. 4 durch eine Spiegelung an der y -Achse abgeleitet werden kann. Diese Figg. 1—4 stellen zugleich schematisch die reellen Lösungen der einfachen Schwingungsgleichung von der Form

$$A_0 y'' + A_1 y' + A_2 y = 0$$

dar. Aus ihnen setzen sich die reellen Lösungen der allgemeinen linearen Differentialgleichung (1) durch Summation zusammen.



Fig. 3.

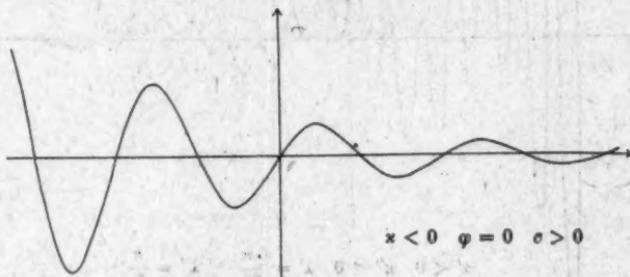


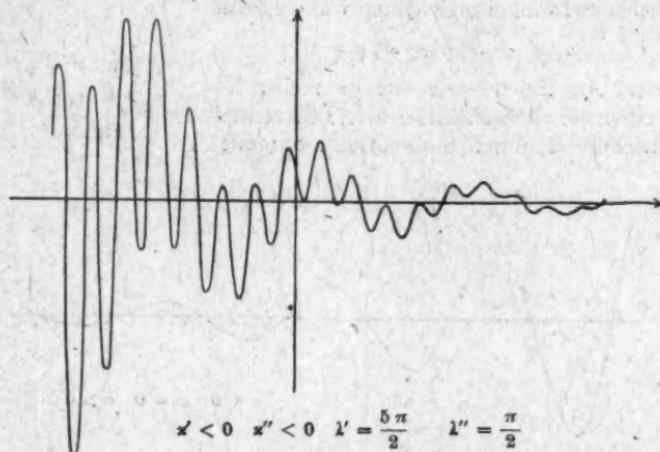
Fig. 4.

Erfüllen die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung die Bedingungen I des vorhergehenden Paragraphen, so ist die Lösung der Gleichung (1) durch

$$(4) \quad y = C_1 e^{rx} + C_2 e^{rx} + C e^{rx} \sin(\lambda x + \varphi)$$

dargestellt, und es ist nun leicht, sich ein schematisches Bild von den reellen, durch die letzte Gleichung gelieferten Kurventypen zu verschaffen.

Man erhält diese Typen durch Addition der Kurve Fig. 4 und einer der Kurven Fig. 1—3 — bzw. dem Spiegelbilde derselben, sei es in Bezug auf die x -Achse oder auf die y -Achse —. Die Anschauung der hiernach möglichen Typen ist so einfach, daß eine Zeichnung überflüssig erscheint. Wenn $x = 0$ ist, so erhält man eine, den einfachen Kurven Figg. 1—3 aufgesetzte gleichmäßige fortlaufende Schwingung. Wenn dagegen $x \neq 0$ ist, so werden die aufgesetzten Schwingungen nach der einen Seite hin immer kleiner, und die resultierende Kurve schmiegt sich bei hinreichend großem, positivem oder negativem x für $x < 0$ bzw. $x > 0$ immer enger an jene einfachen Kurven der Figg. 1—3 an, während nach der entgegengesetzten Seite eine Schwingung mit unbegrenzt wachsender Amplitude der einfachen Kurve aufgesetzt ist.



$$\begin{aligned}x' < 0 \quad x'' < 0 \quad \lambda' = \frac{5\pi}{2} \quad \lambda'' = \frac{\pi}{2} \\C_1 > 0 \quad C_2 > 0 \quad \varphi' = -\frac{5\pi}{4} \quad \varphi'' = 0\end{aligned}$$

Fig. 5.

Erfüllen nun zweitens die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung die Bedingungen IIa und IIb in § 2, so ist die allgemeine Lösung der Gleichung (1) von der Form
(5) $y = C_1 e^{\lambda' x} \sin(\lambda' x + \varphi') + C_2 e^{\lambda'' x} \sin(\lambda'' x + \varphi'')$
und die reellen, in dieser Gleichung enthaltenen Kurven sind schematisch durch die Figg. 5 und 6 dargestellt.

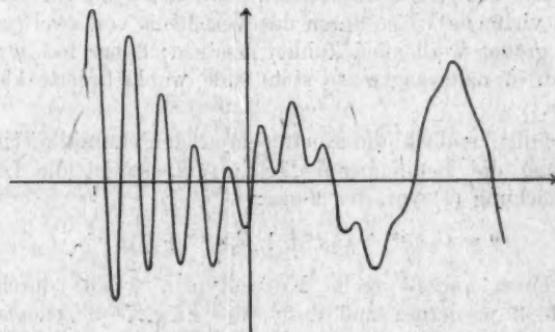
Fig. 5 entspricht der speziellen Gleichung:

$$y = e^{-\frac{x}{8}} \sin \frac{5\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) + e^{-\frac{x}{8}} \sin \frac{\pi}{2} x$$

und zeigt den Fall, in dem α' und α'' gleiches Vorzeichen besitzen, indem der Fall positiver α aus der Zeichnung durch eine Spiegelung an der y -Achse hervorgeht. Man hat offenbar zwei sich aufeinander lagernde gedämpfte Schwingungen, so daß im ganzen der etwas verzerzte Verlauf einer gedämpften Schwingung mit ab- oder zunehmender Amplitude herauskommt, die aus einer kürzeren in eine längere Schwingungsperiode übergeht.

Die nächste Kurve, Fig. 6, stellt die Gleichung dar:

$$y = e^{-\frac{x}{8}} \sin \frac{5\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) + e^{\frac{x}{8}} \sin \frac{\pi}{2} x$$



$$\alpha' < 0 \quad \alpha'' > 0 \quad \lambda' = \frac{5\pi}{2} \quad \lambda'' = \frac{\pi}{2}$$

$$C_1 > 0 \quad C_2 > 0 \quad \varphi' = -\frac{5\pi}{4} \quad \varphi'' = 0$$

Fig. 6.

und erläutert den Fall mit entgegengesetzten Vorzeichen der Dämpfungskonstanten α' und α'' . Die Kurve nähert sich mit wachsendem x immer mehr der Kurve

$$y = e^{\frac{x}{8}} \sin \frac{\pi}{2} x,$$

d. h. einer Sinuslinie mit ständig wachsender Amplitude und mit abnehmendem, negativem x der Kurve

$$y = e^{-\frac{x}{8}} \sin \frac{5\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right),$$

die ebenfalls eine Sinuslinie mit wachsender Amplitude ist. Man hat somit einen Übergang von einer abnehmenden Schwingung mit bestimmter Periode zu einer zunehmenden Schwingung mit anderer Periode.

Zwischen diesen beiden letzten Fällen liegt die Annahme $\lambda' = \lambda'' = 0$, die man sich als Übergang der Kurven in Figg. 5 und 6 leicht vorstellen kann. Es mag nur noch bemerkt werden, daß die Funktion $y = C_1 \sin(\lambda' x + \varphi') + C_2 \sin(\lambda'' x + \varphi'')$ im allgemeinen keine reelle Periode hat, nach der sie sich exakt wiederholt, sondern nur dann, wenn λ' und λ'' im Verhältnis zweier ganzer Zahlen zueinander stehen. Ist dann etwa $\lambda' : \lambda'' = g_1 : g_2$, oder $\lambda' = g_1 \lambda$ und $\lambda'' = g_2 \lambda$, so nimmt y wieder denselben Wert an, wenn x um $2\pi/\lambda$ oder ein beliebiges Vielfaches davon wächst. Bekanntlich kann man aber näherungsweise das Verhältnis zweier irrationaler Zahlen auf unendlich vielfache Weise durch das Verhältnis von zwei ganzen, immer größer werdenden Zahlen ersetzen; daher hat y praktisch, d. h. näherungsweise stets eine wohldefinierte kleinste Periode.

Erfüllen endlich die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung die Bedingungen IIc in § 2, so ist die Lösung der Gleichung (1) von der Form:

$$(3) \quad y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + C_4 e^{r_4 x}.$$

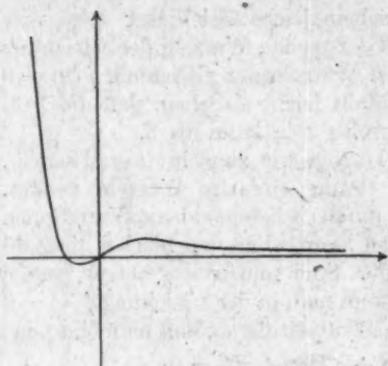
Diese Form umfaßt reelle Kurventypen, welche durch die Figg. 1—3 wiederum und durch die Figg. 7—9 schematisch dargestellt sind, oder durch deren Spiegelbilder an der y -Achse bzw. x -Achse. Die Figg. 7—9 entsprechen speziell den Gleichungen:

$$y = e^{-2x} + e^{-\frac{2}{5}x} - e^{-\frac{6}{5}x} - e^{-\frac{8}{5}x},$$

$$10y = -3e^{-8x} + 23,22e^{-x} - 21,25e^{2x} + e^{5x}.$$

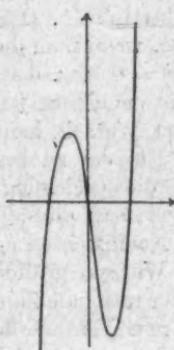
$$10y = e^{-8x} - 23,22e^{-x} - 10,62e^{2x} + \frac{1}{2}e^{5x}.$$

Immer hat man es bei diesen Kurven mit einem aperiodischen Verlaufe zu tun, in den sich eine Schwingung einschieben kann. Indem man das Verhalten der Exponentialfunktion e^{rx} für unendliche x berücksichtigt, ist es sehr leicht, festzustellen, wie die Kurve ins Unendliche geht. Man schließt hiernach u. a.,



$$\begin{aligned}r_1 &< 0 \quad r_2 < 0 \quad r_3 < 0 \quad r_4 < 0 \\r_1 &< r_4 < r_3 < r_2 \\C_1 &> 0 \quad C_4 > 0 \quad C_3 < 0 \quad C_2 < 0\end{aligned}$$

Fig. 7.



$$\begin{aligned}r_1 &< 0 \quad r_3 < 0 \quad r_2 > 0 \quad r_4 > 0 \\C_1 &< 0 \quad C_3 > 0 \quad C_2 < 0 \quad C_4 > 0 \\r_1 &< r_3 < r_2 < r_4\end{aligned}$$

Fig. 8.

daß die x -Achse Asymptote der Kurve sein kann für $x \rightarrow +\infty$, oder für $x \rightarrow -\infty$, aber nicht so, daß die Kurve in beiden Richtungen der Achse ins Unendliche geht. Besonders ist es aber für die Zeichnung der Kurve nützlich, zu wissen, wie viele und welche Extremwerte mit horizontaler Tangente die Kurve besitzt und wie oft sie die x -Achse schneidet. Dies verlangt immer die Bestimmung der endlichen reellen Wurzeln einer transzendenten Gleichung von der Gestalt:

$$\begin{aligned}F(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + c_3 e^{r_3 x} \\+ c_4 e^{r_4 x} = 0,\end{aligned}$$

mit reellen Koeffizienten c_i . Setzt man $u = e^x$, so ist u eine positive reelle Zahl und man hat also nur die von Null verschiedenen positiven reellen Wurzeln der Gleichung

$$f(u) = c_1 u^{r_1} + c_2 u^{r_2} + c_3 u^{r_3} + c_4 u^{r_4} = 0$$



$$\begin{aligned}r_1 &< 0 \quad r_3 < 0 \quad r_2 > 0 \quad r_4 > 0 \\C_1 &< 0 \quad C_3 < 0 \quad C_2 < 0 \quad C_4 > 0 \\r_1 &< r_3 < r_2 < r_4\end{aligned}$$

Fig. 9.

zu bestimmen. Für eine schematische Zeichnung genügt es sogar, wenn man die *Anzahl* der reellen Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ bzw. der positiven Wurzeln der Gleichung $f(u) = 0$ kennt, und man kann jedenfalls leicht einsehen, daß die Zahl dieser Wurzeln keinesfalls größer sein kann als 3.

Um das zu beweisen, können wir zunächst voraussetzen, daß die Gleichung $f(u) = 0$ nur einfache Wurzeln besitzt, indem man dies allenfalls durch beliebige kleine Variationen der Koeffizienten c_i erreichen kann, ohne daß hierbei die Zahl der Wurzeln geändert würde. Sind nun weiter zuerst einmal r_i vier rationale Zahlen, so kann man in der Gleichung $f(u) = 0$ eine neue Veränderliche $w = u^e$ substituieren, daß man eine neue Gleichung

$$c' w^{r_1} + c'' w^{r_2} + c''' w^{r_3} + c'''' w^{r_4} = 0$$

erhält, in der $r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > 0$ ganze rationale Exponenten sind. Diese Gleichung weist offenbar nie mehr als drei Zeichenwechsel auf und hat daher höchstens drei positive Wurzeln, woraus das-selbe für die Gleichung $f(u) = 0$ folgt. Danach hat auch die Glei-chung $F(x) = 0$ höchstens drei reelle endliche Wurzeln.

Sind aber unter den Größen r_1, r_2, r_3, r_4 einige oder alle irrational, dann kann man jede derselben r_i in eine rationale Zahl r'_i und eine so kleine Zahl zerleger, daß man $e^{r_i x} = e^{r'_i x} + \eta$ setzen kann, wo η so nahe an Null bleibt, als man will, und daß man in dem Ausdrucke $F(x) = \sum c_i e^{r'_i x} + \varepsilon$ die Größe ε ebenfalls beliebig nahe an Null halten kann. Da nun $\sum c_i e^{r'_i x}$ in der Umgebung einer Nullstelle sowohl positive als negative Werte annimmt, deren absoluter Betrag größer als $|\varepsilon|$ gemacht werden kann, so hat $F(x) = 0$ so viele und höchstens so viele reelle Wurzeln als $\sum c_i e^{r'_i x} = 0$, nämlich drei.

Umgekehrt kann man für gegebene Werte r_i die Koeffi-zienten c_i stets so bestimmen, daß $F(x)$ für drei beliebig gewählte reelle Werte von x verschwindet.

Wie die Gestalt der Integrale der linearen Differential-gleichung sich ändert, wenn die charakteristische Gleichung mehrfache Wurzeln aufweist, ist hinlänglich bekannt. Da auch die Gestalten der reellen Kurven für diesen Fall zwar Modifikationen der von uns beschriebenen Bilder verlangen, aber nichts wesentlich Neues bringen, so erübrigert sich eine besondere Besprechung dieser Ausnahmefälle.

(Eingegangen 24. Oktober 1918.)

